

# MÉTRICA

## ESTUDOS E PESQUISAS EM MATEMÁTICA

IBILCE

---

1989

FUNÇÕES DE MORSE E TOPOLOGIA DAS SUPERFÍCIES

II - Classificação das Funções de Morse Estáveis sobre Superfícies.

Sebastião Antonio Izar

### ABSTRACT

We prove here the following theorem of classification for Morse functions in dimension two:  
Theorem. Two Stable Morse functions defined on a closed surface are equivalent if, and only if they have isomorphic labelled Reeb's graphs.

---

**INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS**  
**Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"**  
**São José do Rio Preto**

---

## § 0. Introdução.

Esta parte II é uma continuação natural da parte I onde introduzimos o grafo de Reeb de uma função de Morse  $f:M \rightarrow R$ . As notações utilizadas são aquelas da parte I.

Demonstramos aqui o teorema de classificação em dimensão dois que é o seguinte:

Teorema: Em dimensão dois, duas funções de Morse estáveis são equivalentes se, e somente se tem grafos de Reeb sinalizados isomorfos.

Em linhas gerais, a prova consiste em decompor a superfície e a função como reunião de cobordismos elementares e cobordismos produto e conjugar as restrições das funções nestes cobordismos, de modo que elas possam ser estendidas a uma conjugação global.

Este teorema aparece essencialmente em nossa dissertação de mestrado (2), mas uma afirmação incorreta feita na demonstração dada ali, faz com que ela só se adapte a superfícies orientáveis.

Assim sendo, consideramos aqui o grafo de Reeb sinalizado, o que permite distinguir as superfícies orientáveis das não orientáveis e, com isso, adaptar a demonstração ao caso geral.

Agradecemos ao Prof. Mário Barone Júnior pela orientação daquele trabalho, bem como pelas discussões e

e sugestões na elaboração deste; ao Prof. Wilson Maurício Tadini pelo incentivo para que escrevessemos estas notas e a Mítico Hayashi pelo trabalho de datilografia.

## § 1. Isotopias de $S^1$ .

### Definição 1.0.

Dois difeomorfismos  $h_0, h_1 : S^1 \rightarrow S^1$  são isotópicos se existe uma aplicação diferenciável  $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  tal que cada  $F_t: S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $F_t(x) = f(x, t)$  é um difeomorfismo, e  $F_0 = h_0$  e  $F_1 = h_1$ .

A relação acima é de equivalência.

Se  $k: S^1 \rightarrow S^1$  é um difeomorfismo, considere  $S^1$  como a circunferência unitária no plano complexo. Tem-se  $y \in S^1 \iff \exists t \in [0, 1]$  com  $y = \exp 2\pi it$ . Seja  $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $k(\exp(2\pi it)) = \exp(2\pi i\theta(t))$ . Como  $k$  é difeomorfismo, segue-se  $k$  preserva a orientação de  $S^1$  se, e somente se  $k$  é crescente.

### Proposição 1.1.

Se  $k: S^1 \rightarrow S^1$  preserva a orientação, então  $k$  é isotópico à identidade  $1: S^1 \rightarrow S^1$ .

### Demonstração:

Se  $k$  é tal que  $k(1, 0) = (1, 0)$ , então  $k(\exp(2\pi it)) = \exp 2\pi i\theta(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , com  $\theta(0) = 0$ . Definimos  $K: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  por

$$K(\exp(2\pi it), s) = \exp[2\pi i(s\theta(t) + (1-s)t)] \quad e$$

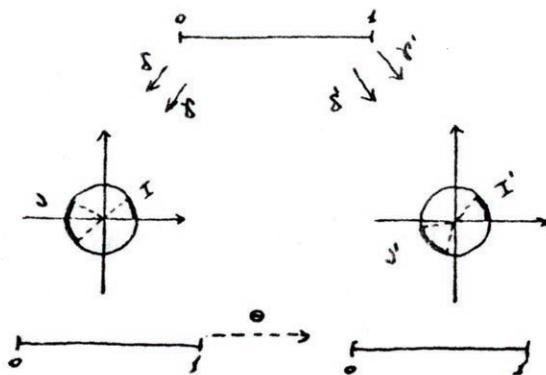
$K$  resulta uma isotopia entre  $k$  e  $1_S$ . Se  $k(1, 0) \neq (1, 0)$ , seja  $\alpha$  o ângulo polar de  $k(1, 0)$  e  $R_\alpha$  a rotação do plano complexo de ângulo  $\alpha$ . Tem-se  $k \circ R_\alpha(1, 0) = (1, 0)$ , donde

$koR_\alpha$  é isotópico a 1. Mas  $k$  é isotópico a  $koR_\alpha$ , pois  $R_\alpha$  é isotópico à identidade.

Proposição 1.2.

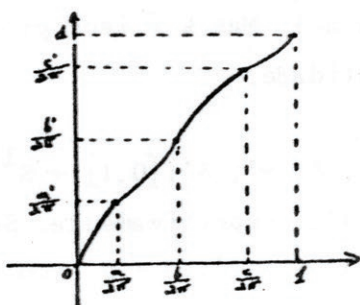
Sejam  $\gamma, \delta, \gamma', \delta': [0,1] \rightarrow S^1$  mergulhos de imagens  $I, J, I'$  e  $J'$ , respectivamente. Suponhamos que  $I \cdot J = \emptyset = I' \cdot J'$  e que  $I$  e  $I', J$  e  $J'$  tem a mesma orientação. Então existe um difeomorfismo  $k: S^1 \rightarrow S^1$  preservando a orientação de  $S^1$  e tal que  $ko\gamma = \gamma', k(I) = I'$  e  $ko\delta = \delta, k(J) = J'$ .

Demonstração.



Os difeomorfismos  $\theta_1: [0, a/2\pi] \rightarrow [\bar{0}, a'/2\pi]$ ,  $\theta_1(t) = \log(\gamma'\gamma^{-1}(\exp(2\pi it)))$  e  $\theta_2: [b/2\pi, c/2\pi] \rightarrow [b'/2\pi, c'/2\pi]$ ,  $\theta_2(t) = \log(\delta'\delta^{-1}(\exp 2\pi it))$  preservam as orientações, da do que  $I$  e  $I', J$  e  $J'$  tem a mesma orientação.

Seja  $\theta: [0,1] \rightarrow [0,1]$  um difeomorfismo qualquer que estenda  $\theta_1$  e  $\theta_2$ ;



$k: S^1 \rightarrow S^1$  dado por  $k(\exp 2\pi i t) \rightarrow \exp(2\pi i \theta(t))$  satisfaz a condição da proposição 1.2.

## § 2. Conjugação de funções em cobordismos elementares.

### Proposição 2.0.

Se  $f, g: W \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de Morse sem pontos críticos, então  $f \sim g$ .

### Demonstração.

Com efeito, se  $f: W \rightarrow [a, b]$  e  $g: W \rightarrow [c, d]$  não tem pontos críticos, tomando-se difeomorfismos  $k_1: [a, b] \rightarrow [0, 1]$  e  $k_2: [c, d] \rightarrow [0, 1]$  e campos pseudo-gradientes normalizados para  $k_1 \circ f$  e  $k_2 \circ g$ , o diagrama abaixo resulta comutativo (Vide I.1.0).

$$\begin{array}{ccccc}
 V \times [0, 1] & \xrightarrow{h_1} & W & \xrightarrow{f} & [a, b] & \xrightarrow{k_1} & [0, 1] \\
 & \searrow & & & & \nearrow & \\
 & & W & \xrightarrow{g} & [c, d] & & \\
 & & & & & & \nearrow k_2
 \end{array}$$

$$k_1 \circ f \circ h_1^{-1} = k_2 \circ g \circ h_2^{-1}, \text{ donde } (k_2^{-1} \circ k_1) \circ f = g \circ (h_2 \circ h_1^{-1}).$$

### Proposição 2.1.

i) Sejam  $(W; V=S^1, \emptyset)$  e  $(W'; V'=S^1, \emptyset)$  triadas com

funções de Morse  $f$  e  $g$  admitindo um único ponto crítico. Se  $k:V \rightarrow V'$  é um difeomorfismo, então  $k$  se estende a  $h:W \rightarrow W'$  tal que  $f = goh$ .

ii) O mesmo resultado é obtido substituindo-se as tríadas de i) por  $(W; \mathcal{O}, V=S^1)$  e  $(W'; \mathcal{O}', V'=S^1)$ .

Demonstração.

i) Sejam  $f:W \rightarrow [a,b]$ ,  $g:W' \rightarrow [c,d]$  as funções de Morse com campos pseudo-gradientes  $\xi, \xi'$  e mergulhos característicos  $\phi:S^1 \times 0 \rightarrow V$  e  $\phi':S^1 \times 0 \rightarrow V'$ , respectivamente. Os pontos críticos de  $f$  e  $g$  tem índice dois.

Por I.2 tem-se difeomorfismos  $\alpha, \alpha', \ell, \ell'$  tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xleftarrow{\alpha} & \omega(V, \phi) \\
 f \downarrow & & \downarrow \\
 [a,b] & \xleftarrow{\ell} & [-1,1] \\
 & & f_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \omega(V', \phi') & \xrightarrow{\alpha'} & W' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [-1,1] & \xrightarrow{\ell'} & [c,d] \\
 & & g
 \end{array}$$

são comutativos.

O difeomorfismo  $k:V \rightarrow V'$  se estende a  $K:\omega(V, \phi) \rightarrow \omega(V', \phi')$  conjugando  $f_1$  e  $g_1$ , proporcionando, assim, uma conjugação entre  $f$  e  $g$ .

De fato, considere o difeomorfismo  $k_1:S^1 \rightarrow S^1$  dado por  $k_1 = \phi'^{-1} \circ k \circ \phi$  e seja  $k_2:L_2 \rightarrow L_2$  a extensão radial de  $k_1$  a  $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 - y^2 < 1, |xy| < \cosh 1 \sinh 1\} = \bar{B}^2$ .

O difeomorfismo

$$V \setminus \phi(S^1 \times 0) \times B^1 + L_2$$

$$V' \setminus \phi'(S^1 \times 0) \times B^1 + L_2$$

$\downarrow k \quad \downarrow 1 \quad \downarrow k_1$

é compatível com as relações de equivalência que definem  $\omega(V, \phi)$  e  $\omega(V', \phi')$  pois  $(\phi(u, \theta v), c) = (\phi(u, 0), c) \sim (x, y) \iff -x^2 - y^2 = c$  e  $(x, y)$  está na trajetória ortogonal que passa por  $u \iff (k, 1)(\phi(u, 0v), c) = (k\phi(u, 0), c) = (\phi'k_1(u, 0), c) \sim k_1(x, y)$ .

Assim  $kx_1 + k_2$  induz um difeomorfismo  $K: \omega(V, \phi) \rightarrow \omega(V', \phi')$  conjugando  $f_1$  e  $g_1$ .

ii) Segue de i) considerando-se  $-f$  e  $-g$ .

### Definição 2.2.

Seja  $V$  uma 1-variedade fechada, orientada e  $\phi: S^0 \times B^1 \rightarrow V$  um mergulho. Considere sobre  $\phi(S^0 \times B^1)$  a orientação induzida da de  $V$  e  $S^0 \times B^1$  com a orientação produto, onde  $S^0$  e  $B^1$  tem as orientações induzidas da orientação usual de  $\mathbb{R}$ .

Dizemos que  $\phi$  é coerente quanto às orientações se  $\phi$  preserva ou inverte as orientações fixadas acima, quando considerado como um difeomorfismo sobre sua imagem. Caso contrário,  $\phi$  é dito incoerente.

### Proposição 2.3.

Seja  $V$  uma 1-variedade fechada e orientada. Sejam  $\phi, \psi: S^0 \times B^1 \rightarrow V$  mergulhos com o mesmo caráter quanto a orientação e tais que  $S = \phi(S^0 \times 0) = \psi(S^0 \times 0)$ . Então existe



um difeomorfismo  $h: \omega(V, \phi) \rightarrow \omega(V, \psi)$  conjugando as funções de Morse padrões  $\omega(V, \phi)$  e  $\omega(V, \psi)$  e tal que sua restrição a  $V$  é isotópica à identidade de  $V$ .

Demonstração.

i) Se  $\phi$  e  $\psi$  preservam ou  $\phi$  e  $\psi$  invertem as orientações, pela proposição 1.2, existe um difeomorfismo  $k: V \rightarrow V$ ,  $k \simeq 1_V$ , tal que  $\psi = k \circ \phi$  e o difeomorfismo  $h: \omega(V, \phi) \rightarrow \omega(V, \psi)$  é obtido por passagem ao quociente do difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \phi(S^0 \times 0) \times \overline{B}^{-1} + L_1 & & \\ \downarrow k & \downarrow 1 & \downarrow 1 \\ V \setminus \psi(S^0 \times 0) \times \overline{B}^{-1} + L_1 & & \end{array}$$

ii) Suponha que  $\phi$  preserva e que  $\psi$  inverte a orientação.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \xrightarrow{\phi_1 = \psi \circ \xi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Circulo com seta} \\ \text{Circulo com seta} \end{array} \end{array}$$

Seja  $\xi: S^0 \times B^1 \rightarrow S^0 \times B^1$  dada por  $\xi(u, \theta v) = (-u, \theta v)$ . Os mergulhos  $\phi$  e  $\phi_1 = \psi \circ \xi$  preservam a orientação, de modo que existe um difeomorfismo  $k: V \rightarrow V$  preservando a orientação de  $V$  tal que  $k \circ \phi = \psi \circ \xi$ .  $k$  se estende a  $h: \omega(V, \phi) \rightarrow \omega(V, \psi \circ \xi)$  conjugando as funções padrões sobre

tais cobordismos.

Resta a verificação de que  $\omega(V, \psi \circ \xi) \approx \omega(V, \psi)$  por um difeomorfismo que conjuga as funções padrões e cuja restrição a  $V$  é isotópico a identidade de  $V$ .

Seja  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a reflexão dada por  $L(x, y) = (x, -y)$  e  $\ell: L_1 \rightarrow L_1$  a restrição de  $L$  a  $L_1$ .

O difeomorfismo  $H$  dado por

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \mathcal{P}_1(S^0 \times 0) \times B^1 + L_1 & & \\ \downarrow 1 & \downarrow 1 & \downarrow \ell \\ V \setminus \psi(S^0 \times 0) \times B^1 + L_1 & & \end{array}$$

é compatível com as relações de equivalência que definem  $\omega(V, \mathcal{P}_1)$  e  $\omega(V, \psi)$ .

De fato,  $(\mathcal{P}_1(u, \theta v), c) \sim (x, y) \Leftrightarrow (\psi \circ \zeta(u, \theta v), c) \sim (x, y) \Leftrightarrow \{\psi(u, \theta(-v)), c\} \sim (x, y) \Leftrightarrow -x^2 + y^2 = c$  e  $(x, y)$  (está na trajetória ortogonal em  $L_1$  por  $(u \cosh \theta, -v \sinh \theta) \Leftrightarrow -x^2 + y^2 = c$  e  $(-x, y) = \ell(x, y)$  está na trajetória ortogonal por  $(u \cosh \theta, v \sinh \theta)$ )  $\Leftrightarrow (\psi(u, \theta v), c) \approx \ell(x, y)$ . Daí,  $(\mathcal{P}_1(u, \theta v), c) \sim (x, y) \Leftrightarrow H(\mathcal{P}_1(u, \theta v), c) \sim H(x, y)$ .

Desta forma  $H$  define, por passagem ao quociente,  $h: \omega(V, \mathcal{P}_1) \rightarrow \omega(V, \psi)$  cuja restrição a  $V$  é a identidade e que conjuga as funções de Morse padrões sobre  $\omega(V, \mathcal{P}_1)$  e  $\omega(V, \psi)$ .

Definição 2.4.

Seja  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse,  $M$  é uma variedade fechada e conexa, e  $(\gamma(f), V_f; f)$  seu grafo de Reeb. Uma sela  $p_i \in M$  (resp., um vértice  $p_i \in \gamma(f)$ ) conecta mínimos se para  $\varepsilon > 0$  tal que sobre  $[f(p_i) - \varepsilon, f(p_i) + \varepsilon]$ ,  $f(p_i)$  é o único valor crítico, tem-se:  $f^{-1}(-\infty, f(p_i) - \varepsilon)$  (resp.,  $f^{-1}(-\infty, f(p_i) - \varepsilon)$ ) tem uma componente conexa a mais que  $f^{-1}(-\infty, f(p_i) + \varepsilon)$  (resp.,  $f^{-1}(-\infty, f(p_i) + \varepsilon)$ ).

Lema 2.5.

Dada uma triada  $(W; V, V')$  com função de Morse  $f$  e campo pseudo-gradiente  $\xi$ , um nível regular  $V = f^{-1}(b)$  e um difeomorfismo  $h: V \rightarrow V$  isotópico à identidade, se  $f^{-1}[a, b]$ ;  $a > b$  não contém pontos críticos, então é possível construir um campo pseudo gradiente  $\xi'$  para  $f$  tal que:

- i)  $\xi'$  coincide com  $\xi$  fora de  $f^{-1}(a, b)$ ;
- ii)  $\phi' = h \circ \phi$ , onde  $\phi$  e  $\phi'$  são os difeomorfismos  $f^{-1}(a) \rightarrow V$  determinados pelos fluxos de  $\xi$  e  $\xi'$ , respectivamente.

Demonstração: Vide [3], pag. 43.

Proposição 2.6.

O campo pseudo-gradiente  $\xi$  para uma função de Morse  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M$  fechada, pode ser tomado de modo que se uma sela não conecta mínimos, as duas componentes conexas de

sua variedade instável provém de uma mesma fonte.

### Demonstração.

Considere sobre o nível  $f^{-1}(f(p_i) - \epsilon)$  as variedades estáveis das selas que precedem  $p_i$  do campo pseudo-gradiente  $\xi$ . O mergulho característico da sela  $p_i$  no nível  $f^{-1}(f(p_i) - \epsilon)$  é disjunto destes pares de pontos e por uma isotopia deste nível faz-se com que a esfera  $\tilde{a}$  esquerda desta sela não é separada pela reunião das esferas  $\tilde{a}$  direita das selas que a precedem. A proposição 2.5. proporcionam um campo  $\xi'$ , pseudo-gradiente para  $f$ , nas condições requeridas.

### § 3. O Grafo de Reeb Sinalizado.

Seja  $f; M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M^2$  fechada e conexa, uma função de Morse estável. Sejam  $\xi$  e  $\eta$  campos pseudo-gradientes para  $f$  nas condições de proposição 2.6. e  $\phi$ ,  $\psi$  mergulhos característicos de uma sela  $p \in M$  que não conecta mínimos, mas conecta componentes conexas do nível regular que a precede.

$\phi$  e  $\psi$  tem o mesmo caráter quanto a orientação, se considerados como mergulhos no bordo de uma vizinhança saturada por  $f$  na fonte que é o  $\alpha$ -limite das esferas  $\tilde{a}$  esquerda de  $\phi$  e  $\psi$ .

De fato, qualquer curva simples e fechada obtida

assim:

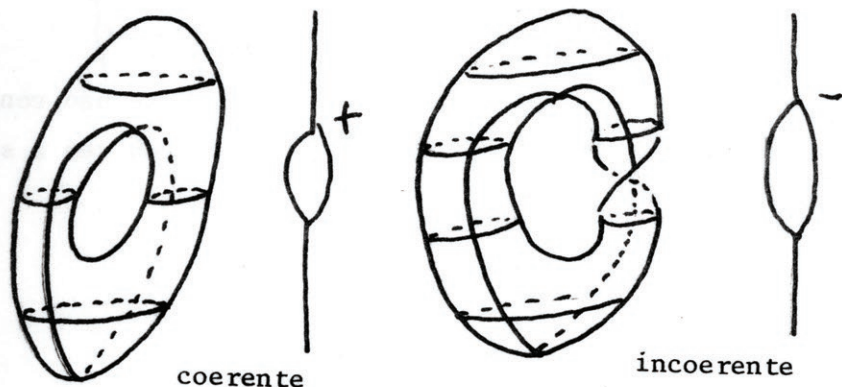
[ fonte  $\rightarrow$  trajetória de  $\xi \rightarrow$  sela  $p$  ] tem vizinhança tubular produto se  $\phi$  é coerente e uma faixa de Mobius se  $\phi$  é incoerente.

Definição 3.0.

O grafo de Reeb sinalizado de  $f:M \rightarrow R$  de Morse estável, é a 4-upla  $\Gamma = (\gamma(f), V_f; f, \sigma_f)$ , onde  $\sigma_f$  é uma aplicação que a cada vértice que conecta componentes conexas, mas não conecta mínimos se associa o sinal + se o mergulho da sela associada ao vértice é coerente; - se é incoerente.

Definição 3.1.

Um grafo de Reeb sinalizado e um grafo de Reeb cujos vértices que conectam componentes conexas, mas não conectam mínimos, são sinalizados.

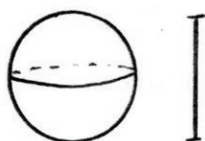


Definição 3.2.

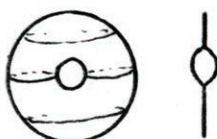
Dois grafos de Reeb  $\Gamma = (\gamma, V; f, \sigma)$  e  $\Gamma' = (\gamma', V'; f', \sigma')$  são isomorfos se existe um homeomorfismo  $h: \gamma \rightarrow \gamma'$  compatível com as rotulações e uma aplicação crescente  $k: f(V) \rightarrow f'(V')$  tais que  $k \circ f_V = g_V \circ h_V$ .

3.3. Exemplos.

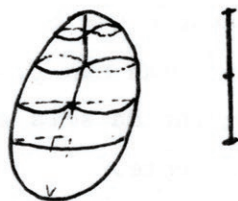
1)  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$



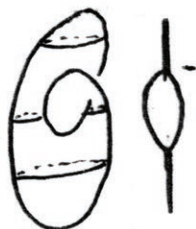
2)  $f: T_1 \rightarrow \mathbb{R}$



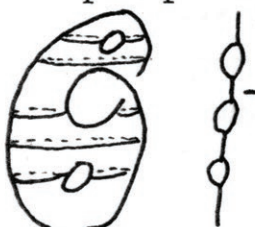
3)  $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$



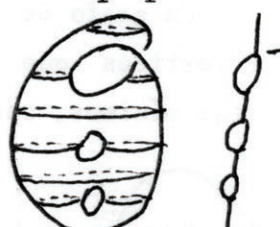
4)  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$



5)  $f: T_1 \# K \# T_1 \rightarrow \mathbb{R}$



6)  $f: T_1 \# T_1 \# K \rightarrow \mathbb{R}$



Os exemplos 5) e 6) representam funções de Morse não congruentes sobre  $T_1 \# T_1 \# K$ , cujos grafos de Reeb sem a sinalização são isomorfos.

§ 4. O Teorema de Classificação.

Definição 4.0.

Duas funções  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  são congruentes ( $f \sim g$ ) se existem difeomorfismos  $h: M \rightarrow M$  e  $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada positiva, tais que  $k \circ f = g \circ h$ .

Teorema 4.1.

Sejam  $f, g: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções de Morse estáveis. Então  $f \sim g$  se, e somente se  $\widehat{\Gamma}(f) \equiv \widehat{\Gamma}(g)$  como grafos de Reeb sinalizados.

Os Lemas seguintes são importantes.

Lema 4.2.

Se  $f: M \rightarrow [a, b]$  é uma função de Morse e  $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$  é um difeomorfismo, então  $\gamma(f) = \gamma(k \circ f)$ ,  $V_f = V_{k \circ f}$ ,  $\overline{k \circ f} = \overline{k \circ f}$  e  $t \in C_f \iff k(t) \in C_{k \circ f}$ , isto é,  $\widehat{\Gamma}(f) \equiv \widehat{\Gamma}(k \circ f)$  canonicamente.

Demonstração.

O Lema segue por passagem ao quociente do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & [a, b] \\
 \downarrow 1 & & \downarrow k \\
 M & \xrightarrow{k \circ f} & [c, d]
 \end{array}$$

Lema 4.3.

Se  $f: M^2 \rightarrow [a, b]$  e  $g: M^2 \rightarrow [c, d]$  são funções de Morse com grafos de Reeb isomorfos, então dado um difeomorfismo  $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$  tal que  $k|_{C_f} = k'$ , onde  $k': C_f \rightarrow C_g$

é a aplicação crescente da equivalência dos grafos, existe um homeomorfismo  $h: \gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$  tal que  $\bar{g}oh = \bar{k}of$ .

Demonstração.

Com efeito, do fato de  $f$  e  $g$  terem grafos de Reeb isomorfos, tem-se aplicações

$$\begin{array}{ccc} \gamma(f) \rightarrow [a, b] & & \bar{f}/V_f \xrightarrow{t} C_f \\ i \downarrow & i/V_f \downarrow & \downarrow k' \\ \gamma(g) \rightarrow [c, d] & & V_g \xrightarrow{\bar{g}/V_g} C_g \end{array}$$

Se  $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$  é um difeomorfismo com  $k/C_f = k'$ , por 3.1 tem-se

$$\begin{array}{ccc} \gamma(f) = \gamma(kof) & \xrightarrow{kof} & [c, d] \\ \gamma(g) & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

Seja  $e$  uma aresta de  $\gamma(kof)$ . Existe uma única aresta de  $\gamma(g): \underline{d}$ , que corresponde a  $\underline{e}$  pelo isomorfismo  $i: \gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$  e se  $p$  e  $q$  são os vértices de  $\underline{e}$ , tem-se que  $\bar{e} \xrightarrow{kof} [\bar{k}of(\bar{p}), \bar{k}of(\bar{q})]$  é um homeomorfismo (estamos supondo que  $kof(\bar{p}) < kof(\bar{q})$ ). Como  $k$  coincide com  $k'$  sobre  $C_f$ , vem que  $g$  aplica  $\underline{d}$  homeomorficamente sobre

$$[\bar{g}(\bar{p}), \bar{g}(\bar{q})] \cong [\bar{k}of(\bar{p}), \bar{k}of(\bar{q})].$$

Assim, temos homeomorfismos  $\bar{k}of: \bar{e} \rightarrow [\bar{k}of(\bar{p}), \bar{k}of(\bar{q})]$ .



$\text{kof}(\bar{q})]$  e  $g|_d: \bar{d} \rightarrow [\text{kof}(\bar{p}), \text{kof}(\bar{q})]$ , donde um homeomorfismo  $h: \bar{e} \rightarrow \bar{d}$  dado por  $h = \bar{g}^{-1}|_d \circ (\text{kof})|_e$ .

Como  $\gamma(\text{kof})$  tem a topologia fraca, segue-se que existe um homeomorfismo  $h: \gamma(\text{kof}) \rightarrow \gamma(g)$  tal que  $\bar{g}oh = \text{kof}$ .

Demonstração do Teorema 4.1.

Com efeito, que a condição é necessária foi demonstrado em I.2.12 e para a suficiência, de  $\bar{\Gamma}(f) \equiv \bar{\Gamma}(g)$ , pela definição I.2.8  $\gamma(f)$  e  $\gamma(g)$  são homeomorfos por um homeomorfismo  $i: \gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$  tal que

$$\begin{array}{ccc} V_f & \xrightarrow{\bar{f}} & C_f \\ i \downarrow & & \downarrow k' \\ V_g & \xrightarrow{\bar{g}} & C_g \end{array} \quad \text{é comutativo, com } k': C_f \rightarrow C_g \text{ uma}$$

aplicação monotônica.

Seja  $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$  um difeomorfismo que estende  $k'$ . Pelo Lema 4,3 existe um homeomorfismo  $\bar{h}: \gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$  tal que  $\text{kof} = \bar{g}\bar{h}$ . Pelo Lema 4,2  $\bar{\Gamma}(\text{kof}) \equiv \bar{\Gamma}(f)$  e como  $\text{kof} \sim f$ , é suficiente demonstrarmos que  $g \sim \text{kof}$ .

Isto posto podemos identificar  $f$  com  $\text{kof}$  e supor que  $f, g: M^2 \rightarrow [a, b]$  são tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \gamma(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & [a, b] \\ \bar{h} \downarrow & \nearrow & \\ \gamma(g) & \xrightarrow{\bar{g}} & \end{array} \quad \text{é comutativo.}$$

Sejam  $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$  os valores críticos de  $f$  e  $g$  e  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  os épsilons da definição de mergulho característico I.1.2.ii e  $\epsilon = \min \epsilon_i$ . Existem difeomorfismos  $h_i: f^{-1}[a_i, b_i] \rightarrow g^{-1}[a_i, b_i]$  dados por 2.0 e 2.3., onde  $a_i = c_i - 3\epsilon^2$  e  $b_i = c_i + 3\epsilon^2$ , tais que  $f = g \circ h_i$  quando restritas a  $f^{-1}[a_i, b_i]$ .

As subvariedades  $B_{i,i+1} = f^{-1}[c_i + \epsilon^2, c_{i+1} - \epsilon^2]$  e  $B'_{i,i+1} = g^{-1}[c_i + \epsilon^2, c_{i+1} - \epsilon^2]$  são cobordismos produto e, pela proposição 2.0 existem difeomorfismos.

$$\phi: B_{i,i+1} \rightarrow f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \times [c_i + \epsilon^2, c_{i+1} - \epsilon^2]$$

$$\psi: B'_{i,i+1} \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \times [c_i + \epsilon^2, c_{i+1} - \epsilon^2], \text{ de modo que}$$

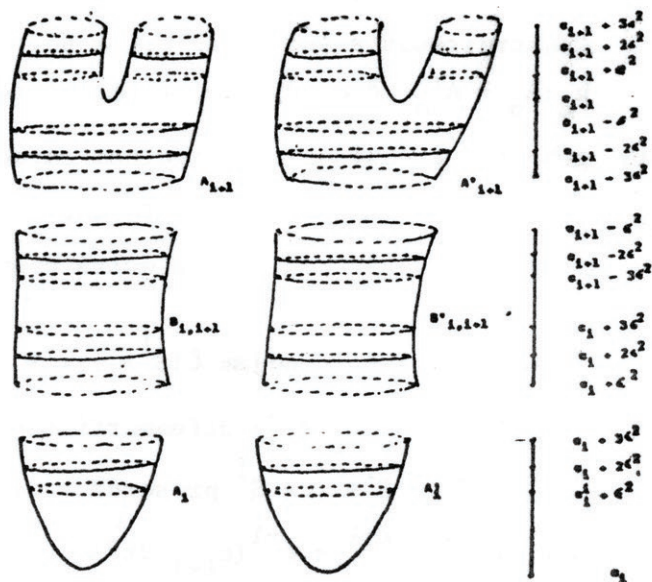
$$f|_{B_{i,i+1}} = f_1 \circ \phi \quad \text{e} \quad g|_{B'_{i,i+1}} = g_1 \circ \psi, \text{ onde } f_1 \text{ e } g_1 \text{ são}$$

as projeções na segunda coordenada.

Dado que os grafos de  $f$  e  $g$  são isomorfos, segue-se que  $f^{-1}(c_i + \epsilon^2) \approx g^{-1}(c_i + \epsilon^2)$ , donde pela proposição 2.0  $B_{i,i+1} \approx B'_{i,i+1}$  por um difeomorfismo que torna as funções equivalentes nestes cobordismos.

Consideremos agora, os difeomorfismos  $h_i$  restri-

tritos a  $A_i = f^{-1}[c_i - 2\epsilon^2, c_i + 2\epsilon^2]$  e dois níveis críticos consecutivos.



Asserção.

Os difeomorfismos  $h_j$  podem ser tomados de modo que existem difeomorfismos  $\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \rightarrow B'_{i,i+1}$  com  $g \circ \alpha_{i,i+1} = f$  e tais que

$$\alpha_{i,i+1} \Big|_{A_i \cap B_{i,i+1}} = h_i \quad \text{e} \quad \alpha_{i,i+1} \Big|_{B_{i,i+1} \cap A_{i+1}} = h_{i+1}'$$

Com efeito, consideremos os campos pseudo-gradien-tes  $\xi$  e  $\zeta$  para  $f$  e  $g$ , respectivamente tais que  $\xi(f) \equiv 1$

fora de  $\bigcup f^{-1}(c_i - \epsilon^2, c_i + \epsilon^2)$  e  $\zeta(g) \equiv 1$  fora de  $\bigcup g^{-1}(c_i - \epsilon^2, c_i + \epsilon^2)$ .

Construiremos a sequência acima por recorrência:  
 $h_0: A_0 \rightarrow A'_0$  é um difeomorfismo entre os discos tal que  $g \circ h_0 = f$  e conjuga os mergulhos característicos à esquerda da sela  $P_j$  que conecta mínimos, conectando a componente conexa de  $A_0$  com alguma outra componente conexa.

Dado  $h_i: A_i \rightarrow A'_i$ , sejam  $\ell: S^1 + \dots + S^1 \rightarrow f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2)$  e  $m: S^1 + \dots + S^1 \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2)$  difeomorfismos tais que  $m^{-1} \circ h_i \circ \ell: S^1 + \dots + S^1 \rightarrow S^1 + \dots + S^1$  preserva a orientação de  $S^1$ . Sejam  $\theta_1: S^{\lambda-1} \times B^{2-\lambda} \rightarrow f^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2)$  e  $\theta_2: S^{\lambda-1} \times B^{2-\lambda} \rightarrow g^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2)$  os mergulhos característicos de  $f$  e  $g$  no nível  $c_{i+1}$ ;  $\phi_t: f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \rightarrow f^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2)$  e  $\psi_t: g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \rightarrow g^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2)$  os difeomorfismos dados pelo fluxo de  $\xi$  e  $\zeta$ , respectivamente, onde  $t = c_{i+1} - c_i - 4\epsilon^2$ .

Se os cobordismos tem índice 0, o mergulho é vazio. Fora da componente conexa que contém o ponto crítico,  $h_{i+1}|_{f^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2)}$  é  $\psi_t \circ h_i \circ \phi_{-t}$  e na componente conexa

xa que contém o ponto crítico, a construção é similar a de  $h_0 : h_{i+1}$  restrito ao bordo desta componente conjuga o traço do mergulho característico que a $\bar{i}$  incide e que conecta tal componente com alguma já existente ou que surgirá em um nível superior.

Se o cobordismo tem índice 2, o mergulho é sobre uma das componentes conexas e tais componentes se correspondem (grafos de Reeb isomorfos).

$$A_{i+1} \approx f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \setminus \theta_1(S^1 \times 0) \times B^1 + L_2.$$

$$A'_{i+1} \approx g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \setminus \theta_2(S^1 \times 0) \times B^1 + L_2.$$

Fora da componente conexa que contém o ponto crítico o difeomorfismo  $h_{i+1}$  é dado pela Proposição 2.0 estendendo  $h_i$ . A componente conexa que contém o ponto crítico é um disco e  $h_{i+1}$  é a extensão de  $h_i$  a este disco conjugando  $f$  e  $g$ .

Se o cobordismo tem índice 1, existe  $k : S^1 + \dots + S^1 \rightarrow S^1 + \dots + S^1$  preservando a orientação de cada parcela  $S^1$  e tal que

$$\begin{array}{ccc}
 S^0 \times B^1 & \xrightarrow{\quad \eta \quad} & S^0 \times B^1 \\
 \theta_1 \searrow & & \swarrow \theta_2 \\
 f^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2) & & g^{-1}(c_{i+1} - 2\epsilon^2) \\
 \uparrow \phi_t & & \uparrow \psi_t \\
 f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) & \xrightarrow{h_i} & g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \\
 \nearrow \ell & & \nwarrow m \\
 S^1 + \dots + S^1 & \xrightarrow{m^{-1} h_i \ell} & S^1 + \dots + S^1
 \end{array}$$

$\text{kol}^{-1} \circ \phi_{-t} \circ \theta_1 = m^{-1} \circ \psi_{-t} \circ \theta_2 \circ \eta$ , onde  $\eta: S^0 \times B^1 \rightarrow S^0 \times B^1$  é um difeomorfismo que preserva ou inverte a orientação de  $S^0 \times S^1$ .

Seja  $j = m \circ \text{kol}^{-1}$ .

Via o difeomorfismo  $\psi_t \circ j \circ \phi_{-t}$ , construímos

$$h_{i+1}: A_{i+1} \rightarrow A'_{i+1}.$$

Segue-se que  $h_{i+1}|_{\partial A_{i+1}} = j$  conjuga, a menos de

$\eta$  os mergulhos dos pontos críticos de  $A_{i+1}$  e  $A'_{i+1}$ , donde  $h_{i+1}$  conjuga as funções  $f$  e  $g$  sobre estes cobordismos.

De fato, se a sela conecta mínimos, por construção,  $\eta$  pode ser tomado como a identidade de  $S^0 \times B^1$ ; se a sela não conecta mínimos, mas conecta componentes conexas,

como os grafos de Reeb sinalizados são isomorfos, segue-se que os mergulhos são do mesmo tipo, donde são conjugados por  $k$  e  $\eta$ ; e se a sela não conecta componentes conexas do nível anterior, as vizinhanças das selas nos grafos de Reeb são de um dos seguintes tipos:  $Y$  ou  $\dagger$  e ambos os mergulhos tem o mesmo caráter quanto a orientação. A proposição 2.3 juntamente com 2.2 se aplicam.

$j$  e  $h_i|_{f^{-1}(c_i+2\epsilon^2)}$  são isotópicos: se

$K: (S^1 + \dots + S^1) \times [0,1] \rightarrow S^1 + \dots + S^1$  é uma isotopia entre  $m^{-1}h_i|_{\ell}$  e  $k$ , a aplicação  $K = mK(\ell, 1_I)^{-1}$  é uma isotopia entre  $j$  e  $h_i|_{f^{-1}(c_i+2\epsilon^2)}$

Seja  $\alpha: f^{-1}(c_i+2\epsilon^2) \times [c_i+\epsilon^2, c_{i+1}-\epsilon^2] \rightarrow g^{-1}(c_i+2\epsilon^2) \times [c_i+\epsilon^2, c_{i+1}-\epsilon^2]$  uma isotopia entre  $h_i$  e  $j$  tal que  $\alpha(x,t) = (h_i(x), t)$  se  $c_i+\epsilon^2 < t < c_i+3\epsilon^2$  e  $\alpha(x,t) = (j(x), t)$  se  $c_{i+1}-3\epsilon^2 < t < c_{i+1}-\epsilon^2$  e seja  $\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \rightarrow B'_{i,i+1}$  dada por  $\alpha_{i,i+1} = \psi^{-1}\alpha\phi$ .

Relativamente a  $\alpha_{i,i+1}$ , temos:

sobre  $f^{-1}(c_{i+1}-3\epsilon^2, c_{i+1}-\epsilon^2)$ ,

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,i+1}(x) &= \psi^{-1} \alpha(\phi_{c_i+2\epsilon^2-f(x)}(x), f(x)) = \\
&= \psi^{-1}(j\phi_{c_i+2\epsilon^2-f(x)}(x), f(x)) = \\
&= \psi_{f(x)-c_i-2\epsilon^2} j\phi_{c_i+2\epsilon^2-f(x)}(x) = \\
&= \psi_{f(x)-c_{i+1}+2\epsilon^2} (\psi_t j\phi_{-t})\phi_{c_{i+1}-2\epsilon^2-f(x)}(x) = \\
&= \psi_{f(x)-c_{i+1}+2\epsilon^2} h_{i+1} \Big|_{f^{-1}(c_{i+1}-2\epsilon^2)} \phi_{c_{i+1}-2\epsilon^2-f(x)}(x) = \\
&= h_{i+1}(x); \text{ e sobre } f^{-1}((c_i + \epsilon^2, c_i + 3\epsilon^2)), \text{ temos} \\
&= \psi^{-1}(h_i \Big|_{f^{-1}(c_i+2\epsilon^2)} \phi_{c_i+2\epsilon^2-f(x)}(x), f(x)) = \\
&= \psi_{f(x)-c_i-2\epsilon^2} h_i \Big|_{f^{-1}(c_i+2\epsilon^2)} \phi_{c_i+2\epsilon^2-f(x)}(x) = h_i(x)
\end{aligned}$$



Segue-se também que  $\alpha_{i,i+1}: B_{i,i+1} \rightarrow B'_{i,i+1}$  é

tal que  $g \circ \alpha_{i,i+1} = f$ .

De fato, tem-se

$$\begin{array}{ccccc}
 B_{i,i+1} & \rightarrow & f^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \times J & \rightarrow & g^{-1}(c_i + 2\epsilon^2) \times J & \rightarrow & B'_{i,i+1} \\
 & \searrow f & & \swarrow f_1 & & \swarrow g_1 & \\
 & & & & J & & \\
 & & & & \swarrow g & & 
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{onde } J &= [c_i + \epsilon^2, c_{i+1} - \epsilon^2] \quad g \circ \alpha_{i,i+1} = g(\psi^{-1} \alpha \phi) = g_1 \alpha \phi = \\
 &= f_1 \phi = f.
 \end{aligned}$$

Além disso,

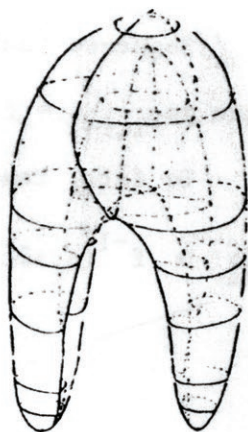
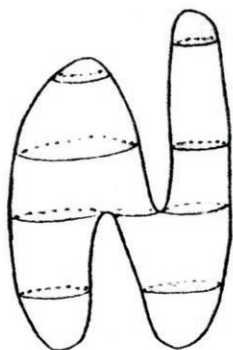
$$M = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} (A_i \cup B_{i,i+1} \cup A_{i+1}) \quad \text{e} \quad M = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} (A'_i \cup B'_{i,i+1} \cup A'_{i+1})$$


$$\text{e a aplicação } h = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} (h_i \cup \alpha_{i,i+1} \cup h_{i+1}); \quad M \rightarrow M \text{ é um difeomorfismo tal que } f = g \circ h.$$

Isto completa a prova do teorema 3.0.

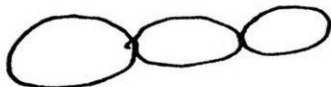
Nota: O teorema 3.0 é falso para o caso de funções de Morse não estáveis.

Damos abaixo duas funções de Morse sobre  $S^2$  com grafos de Reeb isomorfos e que não são equivalentes.



As funções acima tem grafos isomorfos a 

e não são equivalentes, dado o fato que os níveis críticos correspondem ao índice 1 não são homeomorfos:



#### Bibliografia:

1. IZAR, S.A.- Funções de Morse e Topologia das Superfícies I) O Grato de Reeb de  $f:M \rightarrow R$ . Métrica nº 31-IBILCE-UNESP -São José do Rio Preto- 1988.
2. IZAR, S.A.- Funções de Morse. Um Teorema de Classificação em dimensão dois - Dissertação de Mestrado-IME-USP - São Paulo - 1978.

3. MILNOR, J.W. - Lectures on the h-cobordism theorem  
Princeton University Press - 1965.

CORRESPONDÊNCIA E INTERCÂMBIO

Departamento de Matemática.

IBILCE - UNESP

C.Postal 136

CEP 15055 - São José do Rio Preto.

SP - Brasil.



---

COMISSÃO EDITORIAL

PROF. DR. ADALBERTO SPEZAMIGLIO    PROF. DR. HYGINO HUGUEROS DOMINGUES

PROF. DR. WILSON MAURÍCIO TADINI

---

Secretária: Mitico Hayashi