Torre de Hanói

Luís Ricardo da Silva Manoel

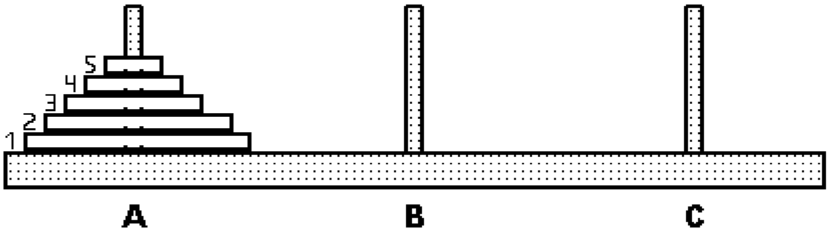
História e Lenda

A torre de Hanói, também conhecida por torre de bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi inventada e vendida como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas. Segundo ele, o jogo que era popular na China e no Japão veio do Vietnã. O matemático foi inspirado por uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade Santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges. De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. A atribuição que os monges receberam foi de transferir a torre formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria. O desaparecimento do mundo pode ser discutido mas não há dúvida quanto ao desmoronamento do templo, maiores detalhes veja o final do texto.

O jogo e proposta de atividades com a Torre de Hanói

Primeiramente deixamos a criança em contato com o jogo para que se familiarizem com as peças, com o jeito de encaixar os discos, isto é, deixamos os alunos brincarem livremente. Depois de feito isto e de ter contado a história do jogo, introduzimos as regras do jogo para os alunos. Então passamos a acompanhar o desenvolvimento do jogo segundo as regras propostas. Para facilitar o trabalho podemos solicitar que os alunos tentem transferir um disco da haste **A** para a haste **C**; depois dois discos e assim por diante segundo as regras, até um limite de, por exemplo, seis discos. Depois que dominarem os movimentos que devem ser feitos, podemos indagar se eles sabem quantos movimentos fizeram para transferir a torre de uma haste para outra, e se essa é a quantidade mínima de movimentos. Também podemos perguntar se há alguma estratégia de movimentação dos discos para obter essa quantidade mínima de movimentos.

O jogo consiste em uma base de madeira onde estão firmados três hastes verticais, e um certo número de discos de madeira, de diâmetros diferentes, furados no centro. Vamos chamar de **A**, **B** e **C**, as três hastes, conforme a figura.



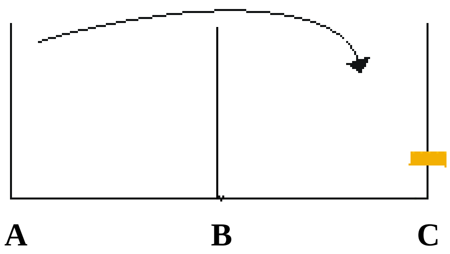
No começo do jogo os discos estão todos enfiados na haste **A**, em ordem decrescente de tamanho, com o menor disco acima de todos. O objetivo é mover todos os discos, de **A** para **C**, obedecendo às seguintes regras:

1)Somente um disco pode ser posto de cada vez.

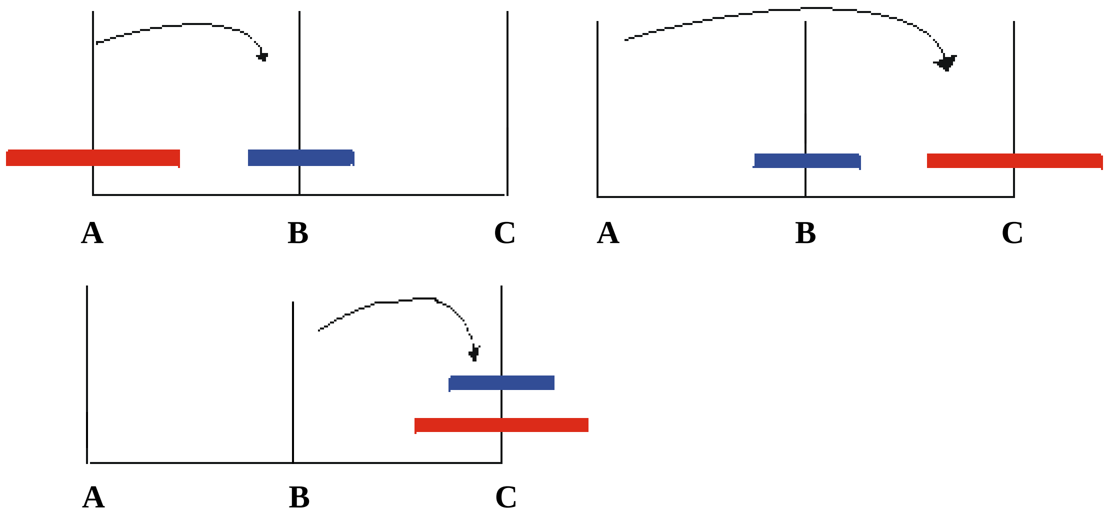
2)Um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor.

Primeiramente deixamos os alunos em contato com o jogo para que se familiarizem com as peças, com o jeito de encaixar os discos, isto é, deixamos os alunos brincarem livremente. Depois de feito isto e de ter contado a história do jogo, introduzimos as regras do jogo para os alunos. Então passamos a acompanhar o desenvolvimento do jogo segundo as regras propostas. Para facilitar o trabalho podemos solicitar que os alunos tentem transferir um disco da haste **A** para a haste **C**; depois dois discos e assim por diante segundo as regras, até um limite de, por exemplo, seis discos. Depois que dominarem os movimentos que devem ser feitos, podemos indagar se eles sabem quantos movimentos fizeram para transferir a torre de uma haste para outra, e se essa é a quantidade mínima de movimentos. Também podemos perguntar se há alguma estratégia de movimentação dos discos para obter essa quantidade mínima de movimentos. Observe que a solução só é possível quando $n>1$, usando a haste **B** como intermediária.

Para solucionar problema proposto - *qual o número mínimo de movimentos que precisaremos fazer para alcançar o objetivo?* - se o jogo só tivesse um disco, seria fácil movê-lo (segundo as regras!) de **A** para **C**. Para isso precisamos de apenas um movimento. Vejamos a figura.



Vamos considerar o caso de dois discos. Movemos o disco menor para **B**; o segundo para **C** e depois o menor de **B** para **C**: acabou. Fizemos três movimentos. Vejamos as figuras.



Consideremos agora um caso geral com n discos. Vamos imaginar que os discos tenham sido numerados de cima para baixo: $1,2,...,n.$ O menor disco é o 1, e o maior é o n.

Para remover o disco n é preciso tirar todos de cima, ou seja, tirar todos os $n-1$ discos que estão acima dele, lembrando-se que queremos mover os discos todos para a haste **C**, e o disco n é o que deve ficar mais embaixo nesta haste. Então é preferível colocar os outros discos na haste **B**, ou seja, devemos mover os $n-1$ discos menores, de **A** para **B** um de cada vez respeitando as regras. Feito isso removemos o disco n para a haste **C**. Agora, para mover os $n-1$ discos para **C**, só é possível se for repetindo o jogo, de modo a passar todos os discos (um a um) de **B** para **C**.

Podemos observar que temos que fazer o jogo com $n-1$ discos duas vezes: primeiro movemos os $n-1$ discos de **A** para **B** (usando **C** como intermediário). Isto descobre o disco n. Movemos então n para **C**. Agora jogamos com os $n-1$ discos mais uma vez: de **B** para **C**, usando **A** como intermediário e com isto empilhamos todos em **C** sem violar as regras. Vamos então verificar qual é o número mínimo de movimentos.

Para facilitar, vamos dizer que o número mínimo de movimentos necessários para completar o jogo de n discos é $T(n)$. Como não há como chegar ao disco n sem mover os $n-1$ de cima, então o número de movimentos que fizemos para isto é $T(n-1)$. Como movemos os $n-1$ para a haste **B**, a haste **C** está livre, logo podemos mover o disco n para **C**, ou seja, o número de movimentos desde o começo do jogo é de $T(n-1)+1$. Então, falta mover os $n-1$ discos de **B** para **C**, para ficarem em cima do disco n, ou seja, o número mínimo de movimentos para fazer isto é $T(n-1)$.

Logo desde o começo do jogo fizemos $T(n-1)+1+T(n-1)=2T(n-1)+1$ movimentos. Pelo que vimos na análise do jogo, mostramos que não é possível fazer um número menor de movimentos, então $T(n)$ é o menor número de movimentos para completar o jogo de n discos, ou seja $T(n)=2T(n-1)+1$. Já vimos que $T(1)=1$. Logo, $T(2)=2T(1)+1=3.$, $T(3)=7$, $T(4)=15$, $T(5)=31$, $T(6)=63$.

Por meio de tentativas, descobrimos que para um disco o número de movimentos é apenas um, colocando o disco direto na haste **C**. Para dois discos é 3 se começarmos na haste **B** ou 6 se começarmos na haste **C**. Para três discos é 7 se começarmos na haste **C** ou 14 *se começarmos na haste* **B**. *Repetindo o processo para 4,5,...,n discos, podemos observar que se o número inicial de discos da torre inicial for ímpar, o primeiro disco da torre deverá ser colocado, inicialmente, na haste* **C** *e, se o número inicial de discos da torre for par, o primeiro disco da torre deverá ser colocado, inicialmente, na haste* **B**. Tabelando estes resultados temos:

Nº de discos	**Quantidade mínima de movimentos**
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Observando a tabela vemos que:

$1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63,...$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

+2 +4 +8 +16 +32

Podemos notar então, que o número somado é sempre o dobro do anterior, que já havia sido somado. Analisando mais atentamente a tabela, temos que o resultado da quantidade mínima de movimentos é sempre 1 a menos do número que foi somado, ou resumidamente:

$n^{\underline{o}}$ de discos	Quantidade mínima de movimentos	$n^{\underline{o}}$ somado
1	1	-1 $\leftarrow$ +2
2	3	-1 $\leftarrow$ +4
3	7	-1 $\leftarrow$ +8
4	15	-1 $\leftarrow$ +16
5	31	-1 $\leftarrow$ +32
6	63	-1 $\leftarrow$ +64

Veja que o número somado é um número do tipo 2^n, e assim a seqüência de números somados forma a PG: (2,4,8,16,32,...) de razão $q = 2$. Logo, a quantidade mínima de movimentos é igual ao número somado menos 1, ou seja, igual a $2^n - 1$. Então descobrimos que $T(n) = 2^n - 1$.

Como obtivemos a fórmula a partir de alguns dados numéricos, queremos saber se é mesmo verdadeira. Para isso vamos usar o *princípio de indução finita*. Já vimos que $T(1) = 1$, ou seja, $2^1 - 1 = 1$; a fórmula vale neste caso. Suponhamos que $T(n) = 2^n - 1$, queremos mostrar que $T(n+1) = 2^{n+1} - 1$. Temos que a hipótese de indução, isto é, a suposição de que a proposição vale para n é $T(n) = 2^n - 1$. Temos que $T(n+1) = 2T(n) + 1$ através do resultado obtido anteriormente ($T(n) = 2T(n-1) + 1$).

Começamos com $T(n+1) = 2T(n) + 1$. Como, pela hipótese de indução, $T(n) = 2^n - 1$, podemos substituir isto na primeira fórmula para obter:

$$T(n+1) = 2T(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

que era o resultado esperado. Logo a fórmula $T(n) = 2^n - 1$ vale para qualquer n natural.

Assim, pôde-se descobrir que a quantidade mínima de movimentos necessários para se efetuar a tarefa com os 64 discos é de 18.446.073.709.551.615 movimentos, levando os monges, muitos bilhões de anos para efetuar a tarefa.

Assim, a partir da descrição e análise da situação de jogo, podemos trabalhar o conceito de seqüência numérica e, particularmente de progressão geométrica e observar o crescimento de funções exponenciais. No ensino fundamental podem ser trabalhados: na 5ª série, as potências de 2; na 7ª série o processo de construção da linguagem matemática e o conceito de variáveis, por exemplo.