

MÉTRICA

ESTUDOS E PESQUISAS EM MATEMÁTICA

IBILCE

1994

DOIS NOVOS ARQUÉTIPOS TETRAMÓRFICOS DE PAVIMENTAÇÃO MONOEDRAL DO PLANO EUCLIDIANO

Eurípedes Alves da SILVA

Ruy Madsen BARBOSA

ABSTRACT

A *monohedral tiling* \wp means one in which each tile is congruent (directly or reflectively) to one particular set P , called the *prototile* of \wp . A tile is called *k-morphic* (or *polymorphic*) if it is, in terms of congruence, the prototile of precisely k different monohedral tilings. For every positive integers k , $k \leq 10$, it is possible to find a tile which is k -morphic (Fontaine & Martin (1.983a, 1.983b, 1.984a and 1.984b)), but no method of generating a k -morphic tile for a prescribed value of k , $k > 10$, exists. Tiles which are k -morphic, for $k > 2$, are harder to find. This study deals with the methodology of *polymorphic transformations* (Barbosa (1.993), Barbosa & Silva (1.994) and Silva (1.994a)); a new notion of *hypermorphic prototile* (Silva (1.994b)) is introduced and two new tetramorphic prototiles, obtained by using the *fittings* and the *shearing* techniques, are exhibited.

INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
Universidade Estadual Paulista
São José do Rio Preto

Neste trabalho construímos dois novos arquétipos tetramórficos originais, com os correspondentes padrões de pavimentação monoedral do plano euclidiano, através das técnicas que denominamos técnicas dos *encaixes* e do *cisalhamento*.

A metodologia da transformação polimórfica via a técnica dos encaixes foi introduzida em Barbosa (1.993), quando se construiu o primeiro arquétipo monoedral trimórfico a partir da estratégia do anulamento de padrões enantiomorfos admitidos pelo arquétipo base. Posteriormente foi empregada em Silva et al. (1.993) e Silva et al. (1.994), visando o estudo das transformações monomórficas do triângulo equilátero. Já a metodologia da transformação via a técnica do cisalhamento foi introduzida em Barbosa & Silva (1.994), retomada depois em Silva (1.994a e 1.994b), com a mesma finalidade de se construir arquétipos polimórficos de pavimentação monoedral do plano, distinguindo-se padrões enantiomorfos.

1.2. Conceitos e Resultados Preliminares

A teoria da pavimentação, independentemente do espaço em que se desenvolva, basicamente se ocupa em descrever conjuntos que o cubram, no sentido de uma partição em conjuntos dois a dois disjuntos¹.

Uma pavimentação \wp do plano euclidiano pode ser definida como uma família enumerável de conjuntos fechados, $\wp = \{ P_1, P_2, \dots \}$, que o cubra sem falhas e sem sobreposição (a não ser sobreposições de área nula). Mais precisamente, a união dos conjuntos P_i , $i \in \mathbb{N}$, deve ser o plano inteiro, enquanto seus interiores devem ser dois a dois disjuntos. Geralmente estes conjuntos se restringem a imagens homeomorfas de discos fechados, quando não, como é o nosso caso neste trabalho, a figuras poligonais.

Sempre que duas pavimentações admitirem um movimento rígido² capaz de sobrepor seus respectivos padrões geométricos de recobrimento do plano, as

¹Em se tratando de espaços topológicos, a pavimentação se dá no sentido de uma cobertura através de conjuntos com interiores dois a dois disjuntos.

²Uma correspondência biunívoca $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, diz-se um movimento rígido se preserva distâncias.

pavimentações se dizem congruentes. Quando ocorrer de os conjuntos que compõem a pavimentação \wp serem congruentes a um particular conjunto P, então \wp diz-se *monoedra*, enquanto que P passa a se denominar um *arquétipo* de \wp . Três exemplos clássicos de pavimentações monoedrais do plano euclidiano são fornecidos pelas pavimentações regulares, expressas pelo resultado:

1.2.1. Teorema

Existem três únicas pavimentações monoedrais lado-a-lado³ através de polígonos regulares, cujos arquétipos são, respectivamente, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.

Uma vez que um dado arquétipo pavimenta o plano monoedralmente, pode-se perguntar de quantas maneiras distintas isto pode ocorrer, ou seja, qual é o número de padrões de cobertura dois a dois não congruentes admitido pelo arquétipo. Se P pavimenta o plano através de um único padrão de cobertura (como ocorre com o hexágono regular), P diz-se um arquétipo *monomórfico*. No caso de apresentar dois padrões distintos, diz-se *dimórfico*, no caso de três, *trimórfico*, e, de um modo geral, admitindo exatamente r pavimentações distintas, diz-se *r-mórfico*. Neste caso, se $1 < r < \infty$, também se costuma referir a P como um arquétipo *polimórfico*. Já os arquétipos admitindo uma infinidade de padrões distintos de cobertura são denominados *hipermórficos*.

O problema da determinação de arquétipos r-mórficos, para um dado $r \in \mathbb{N}$, está longe de ser resolvido, encontrando-se descrito, desde 1.984, nos seguintes termos, conforme Fontaine & Martin (1.983a, 1.983b, 1.984a e 1.984b).

1.2.2. Teorema

Existem polígonos r-mórficos para todo $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq 10$.

A identificação de arquétipos r-mórficos é uma tarefa difícil, mesmo para pequenos valores de r, como $r = 2$ e $r = 3$. Por outro lado, quando encontrados na bibliografia, os raros arquétipos conhecidos nem sempre se fazem acompanhar da metodologia segundo a qual são concebidos.

Em vista dessa dificuldade, em trabalhos anteriores desenvolvemos uma metodologia que consideramos eficiente para a construção de arquétipos r-mórficos, baseada em duas técnicas distintas que denominamos técnicas de *transformação polimórfica* de arquétipos monoedrais. Através da exploração dessas técnicas construímos arquétipos dimórficos, trimórficos e até tetramórficos,

³Pavimentações para as quais dois polígonos quaisquer verificam uma e apenas uma dentre as seguintes condições: (i) os polígonos não possuem ponto em comum; (ii) os polígonos possuem exatamente um ponto em comum, vértice de ambos; (iii) a intersecção entre os polígonos é um lado, comum a ambos.

o que nos tem permitido contribuir para com a relação de arquétipos polimórficos com exemplares essencialmente distintos dos até aqui conhecidos.

A primeira das técnicas empregadas, a da *transformação por encaixes*, aparece implicitamente utilizada na bibliografia em duas ou três ocasiões, assim mesmo praticamente sem maiores referências, isso até recentemente, quando mereceu a sistematização efetuada por Barbosa (1.993). A propósito, desenvolvemos um trabalho contendo oportuna aplicação dessa técnica visando a abtenção de padrões côncavos monoedrais, com o estabelecimento de uma estensa terminologia envolvendo diferentes tipos e configurações de encaixes (em fase final de redação).

Embora ambas as técnicas revelem-se úteis tanto na transformação de arquétipos já polimórficos (visando estender o número de recobrimentos distintos) quanto na transformação de arquétipos hipermórficos, particularmente dos que denominamos hipermórficos por faixas deslizantes e por faixas uniformemente denteadas, em Silva (1.994a.) aparece um estudo comparativo sobre a eficiência das duas técnicas, além de uma caracterização algébrica da técnica da transformação por cisalhamento.

Geometricamente, a técnica dos encaixes resume-se no artifício da inclusão de convenientes encaixes nos lados do arquétipo, enquanto que a técnica do cisalhamento, restringindo-se à transformação de poliminós⁴, caracteriza-se pela inclinação longitudinal que produz sobre os lados do arquétipo, deixando invariantes a base e a altura de cada monominó que o compõe. As duas técnicas visam ou limitar as possibilidades de adaptação entre réplicas congruentes de um arquétipo hipermórfico (por faixas deslizantes ou por faixas denteadas, conforme definido em seguida) e assim reduzir a um número finito as pavimentações admissíveis, ou então, quando aplicadas a arquétipos já polimórficos, estender o número de padrões distintos através do anulamento de enantiomorfismos

1.3. Arquétipos Hipermórficos por Faixas Deslizantes e Denteadas

As técnicas de transformação via encaixes e via cisalhamento revelam-se eficientes particularmente junto aos arquétipos que denominamos *hipermórficos por faixas deslizantes* e por *faixas dentadas*. Introduzidos em Silva (1.994a.),

⁴Figuras resultantes da conexão, vértice-a-vértice, de cópias congruentes de um mesmo quadrado. Os poliminós (polyominoes) foram introduzidos pela primeira vez em 1.953, por Solomon W. Golomb. Uma extensão natural dos poliminós encaminha o conceito para as classes de figuras denominadas *polyiamonds* e *polyhexes*, caracterizadas por conectarem, respectivamente, triângulos equiláteros e hexágonos regulares. (Ver teorema 1.)

esses arquétipos possuem a propriedade de pavimentar o plano a partir de pavimentações parciais⁵ de faixas infinitas.

Os primeiros caracterizam-se por pavimentar faixas planas, limitadas por duas retas paralelas. Para se visualizar a infinidade dos diferentes padrões de cobertura admitidos por um tal arquétipo basta imaginar o sucessivo acoplamento de faixas unidirecionais, combinado com convenientes deslizamentos de faixas adjacentes sobre as retas divisórias. Uma infinidade de figuras possuem a propriedade da pavimentação por faixas deslizantes, a exemplo das figuras policelulares, particularmente os poliminós.

1.3.1. Teorema

Uma condição suficiente para que um arquétipo seja hipermórfico por faixas deslizantes é que ele pavimente um triângulo ou um retângulo⁶.

Quanto aos arquétipos hipermórficos por faixas denteadas, estes se caracterizam por pavimentar faixas infinitas limitadas por divisórias paralelas uniformemente denteadas. O paralelismo e o denteamento uniforme devem ser entendidos no sentido de que as fronteiras das faixas, são linhas poligonais isométricas por translação. Faixas deste tipo serão referidas como faixas uniformemente denteadas.

Mediante determinadas condições de recobrimento, o sucessivo acoplamento de réplicas congruentes de faixas denteadas gera uma nova estratégia de pavimentação monoedral do plano, caracterizando os arquétipos hipermórficos por faixas denteadas. O resultado a seguir estabelece uma condição suficiente para que um arquétipo poligonal admita a estratégia da pavimentação por faixas denteadas.

1.3.2. Teorema

Sejam \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 duas faixas planas uniformemente denteadas, isométricas por translação. Se P é um polígono pavimentando cada uma das faixas, de tal maneira que os padrões determinados não sejam congruentes por isometria translacional, então P é um arquétipo hipermórfico.

O teorema 4 pode ser reenunciado de uma forma mais geral, como a seguir.

1.3.3. Teorema

Seja P um polígono pavimentando uma faixa \mathcal{J} uniformemente denteada. Se \mathcal{J} admite uma simetria que não mantém o padrão original de recobrimento determinado por P , então P é um arquétipo hipermórfico por faixas denteadas.

1.4. A Técnica de Transformação por Cisalhamento

⁵A idéia de pavimentação do plano pode ser adaptada naturalmente a regiões poligonais, inclusive, a regiões infinitas, tipo faixa, limitada por linhas poligonais.

⁶Pode-se mostrar que a condição não é necessária.

A técnica de transformação polimórfica por cisalhamento (ver Silva, 1.994a) aplica-se particularmente na transformação de poliminós. Para caracterizá-la geometricamente, enquanto uma transformação plana⁷, será o bastante descrever sua ação sobre um monominó qualquer, ABCD, conforme aparece em seguida.

Geometricamente o cisalhamento produz uma inclinação de ângulo θ , em relação à horizontal, sobre os lados do monominó ABCD, transformando-o no paralelogramo AB'C'D. A inclinação se restringe aos ângulos θ , $0 < \theta < \pi/2$, o que torna as dimensões x e y do paralelogramo AB'C'D invariavelmente distintas - fato imprescindível para a distinção de padrões enantiomorfos.

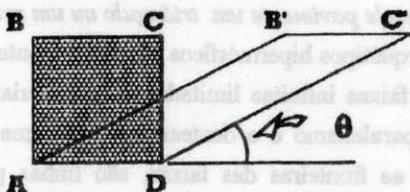


FIGURA 1. O monominó ABCD é transformado no paralelogramo AB'C'D.

Algebricamente a transformação por cisalhamento descreve-se como uma aplicação linear, podendo ser definida por $T(x,y)=(x+k.y,y)$, $k \in \mathbb{R}$. Na Álgebra Linear é comum referir-se a T como um k-cisalhamento (ou k-dilatação) horizontal.

Observe-se que, deixando invariante as ordenadas dos pontos, T desloca cada ponto do plano na direção de Ox, sendo tanto maior esse deslocamento quanto mais afastado estiver do eixo. Os pontos de Ox naturalmente permanecem fixos.

Um detalhe importante refere-se ao fato de que T transforma retângulos de lados paralelos aos eixos coordenados em paralelogramos com dois de seus lados ainda paralelos ao eixo Ox. Pode-se constatar isso a partir de um quadrado de vértices $A(0,0)$, $B(0,a)$, $C(a,a)$ e $D(a,0)$. Com efeito, qualquer reta horizontal interceptando o quadrado em $P(0,y) \in AB$ e $Q(a,y) \in CD$ permite escrever, para um dado k-cisalhamento T, $\|T(Q) - T(P)\| = \|(a+k.y,y) - (k.y,y)\| = \|(a,0)\| = a$ ($a > 0$), de onde resulta que T transforma o quadrado ABCD no paralelogramo de vértices $T(A)=(0,0)$, $T(B)=(k.a,a)$, $T(C)=(k.a+a,a)$ e $T(D)=(a,0)$.

⁷O que equivale dizer, uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano euclidiano.

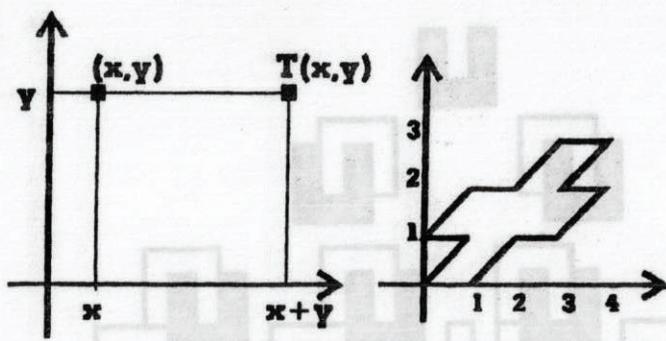
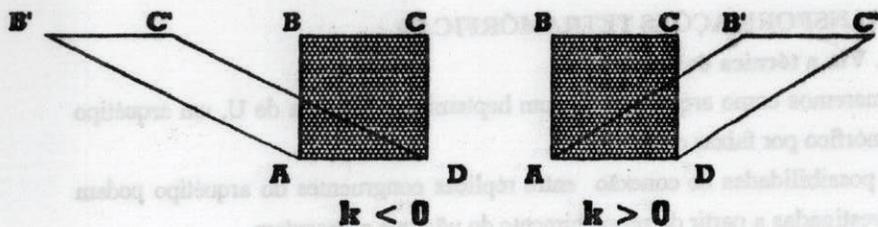


FIGURA 2. No alto aparecem transformações distintas de um quadrado. Embaixo, o resultado da ação de um 1-cisalhamento horizontal sobre o pentaminó em cruz.

Na figura anterior aparecem, superiormente, duas transformações distintas de um quadrado ABCD (para $k < 0$ e $k > 0$). Inferiormente é exemplificada a geometria de um 1-cisalhamento e a correspondente ação sobre um pentaminó em cruz.

1.5. Arquétipos e Padrões Base

No que segue introduzimos dois novos conceitos, em vista da metodologia da transformação polimórfica de arquétipos monoedrais.

Se P e Q são dois arquétipos de pavimentação monoedral e se Q é obtido de P via uma transformação qualquer, dizemos que P é um *arquétipo base* para o arquétipo Q. Neste caso, se $\mathfrak{Z}(P)$ e $\mathfrak{Z}(Q)$ são dois padrões de pavimentação admitidos, respectivamente, por P e por Q, de tal maneira que $\mathfrak{Z}(Q)$ é obtido de $\mathfrak{Z}(P)$ através da mera substituição das réplicas congruentes de P pelas de Q, dizemos que $\mathfrak{Z}(P)$ é um *padrão base* para $\mathfrak{Z}(Q)$.

II. TRANSFORMAÇÕES TETRAMÓRFICAS

2.1. Via a técnica dos encaixes

Tomaremos como arquétipo base um heptaminó em forma de U, um arquétipo hipermórfico por faixas denteadas.

As possibilidades de conexão entre réplicas congruentes do arquétipo podem ser investigadas a partir do preenchimento do *vão* que apresentam.

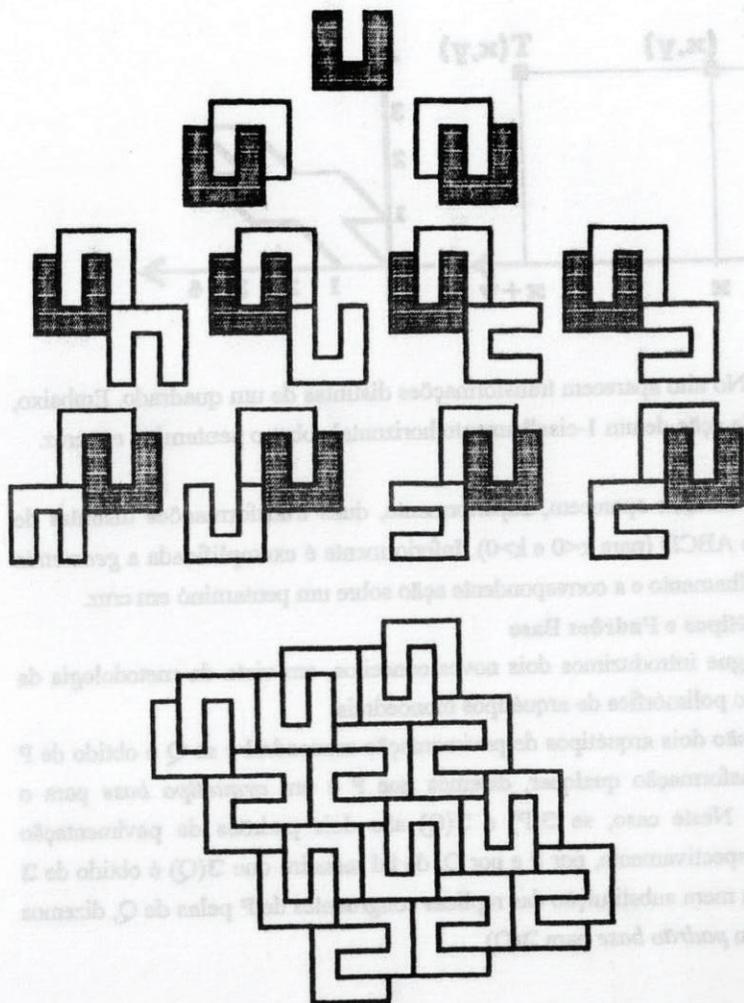


FIGURA 3. No alto, as conexões possíveis com 2 e com 3 réplicas congruentes. Inferiormente, um dos infinitos padrões de pavimentação admitidos pelo arquétipo.

A FIGURA 3 mostra as configurações relativas a conexões com 2 réplicas (2 configurações enantiomorfas) e com 3 réplicas (8 configurações possíveis, 4 essencialmente distintas). Inferiormente aparece o acoplamento de faixas denteadas diferentemente pavimentadas, comprovando que o arquétipo é hipermórfico.

Visando reduzir o número de conexões com 3 réplicas, transformamos o arquétipo base via a adaptação de 6 encaixes duplos, idênticos, centrados e simétricos. Os encaixes acabam impedindo exatamente 4 dos tipos de conexão mostrados na figura anterior. Na FIGURA 4 aparecem os encaixes remanescentes.

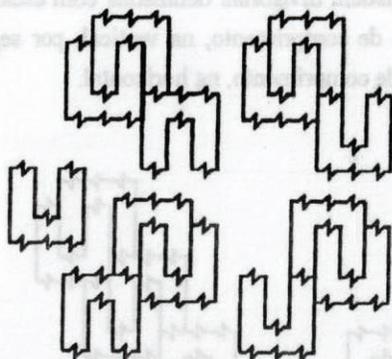


FIGURA 4. As conexões, com 3 réplicas, admitidas pelo novo arquétipo.

Em seguida, estendendo as adaptações a uma quarta réplica, chega-se às possibilidades de conexão mostradas na FIGURA 5.

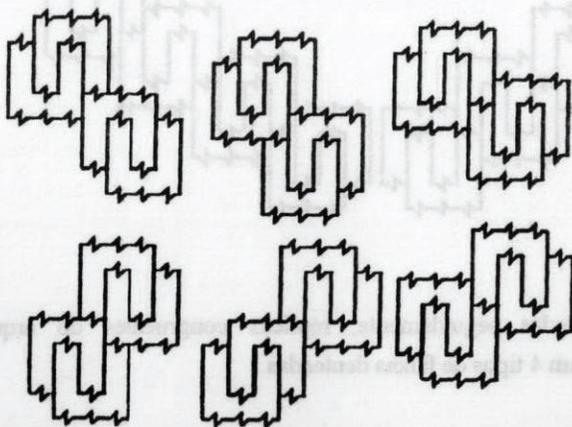


FIGURA 5. As conexões possíveis com 4 réplicas do arquétipo transformado.

Dando continuidade ao processo de adaptação com novas e seguidas réplicas, recatmos em 4 tipos de faixas denteadas, conforme aparece na figura em seguida. Em relação a duas das configurações mostradas na FIGURA 5, especificamente as duas configurações à esquerda, uma superior e outra inferior, o processo não vai além de uma quinta réplica, não se estendendo portanto ao plano todo.

As faixas mostradas superiormente na FIGURA 6 são limitadas por divisórias denteadas de ambos os lados, com segmentos escalonados de 3 unidades de comprimento na vertical por 2 unidades na horizontal, repetidos alternadamente, lisos na vertical e com encaixes duplos na horizontal. Por sua vez, as faixas mostradas na parte inferior possuem divisórias denteadas com escalonamento de segmentos lisos de 2 unidades de comprimento, na vertical, por segmentos com encaixes duplos de 3 unidades de comprimento, na horizontal.

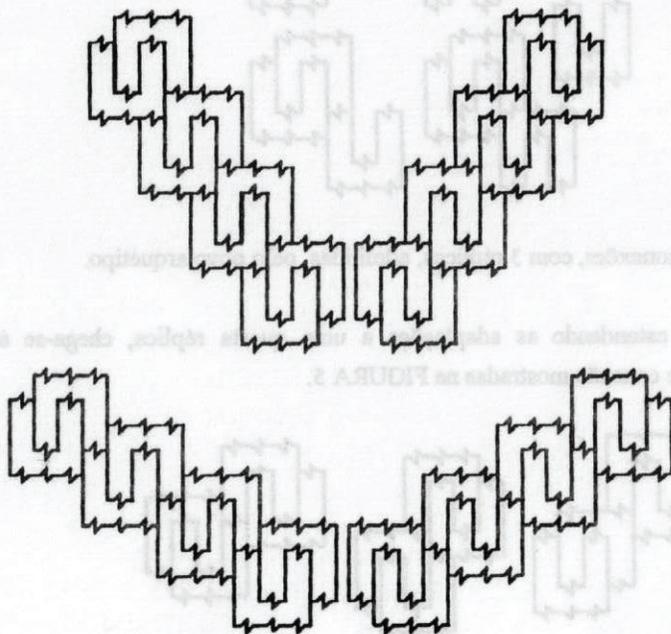


FIGURA 6. Conectadas seguidamente, réplicas congruentes do arquétipo transformado propiciam 4 tipos de faixas denteadas.

Observemos que as faixas da figura anterior não são enantiomorfas, ainda que as faixas com o arquétipo base o sejam. Além disso, faixas idênticas, e apenas as idênticas, admitem acoplamentos sucessivos que acabam levando a uma cobertura de todo o plano. Através destas conexões é que chegamos aos 4 únicos padrões monoedrais distintos de cobertura do plano admitidos pelo arquétipo transformado, conforme mostrado nas FIGURAS 7.a e 7.b, concluindo tratar-se de um arquétipo tetramórfico.

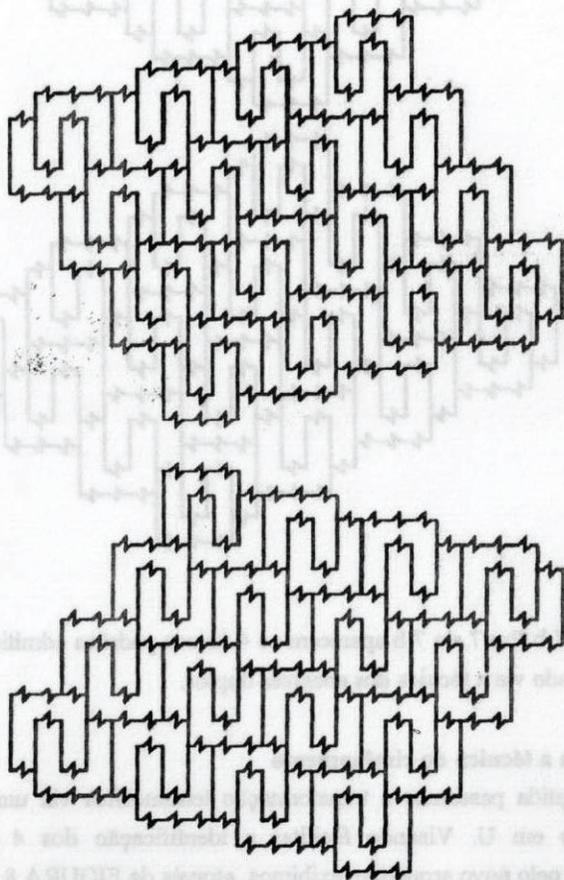


FIGURA 7.a

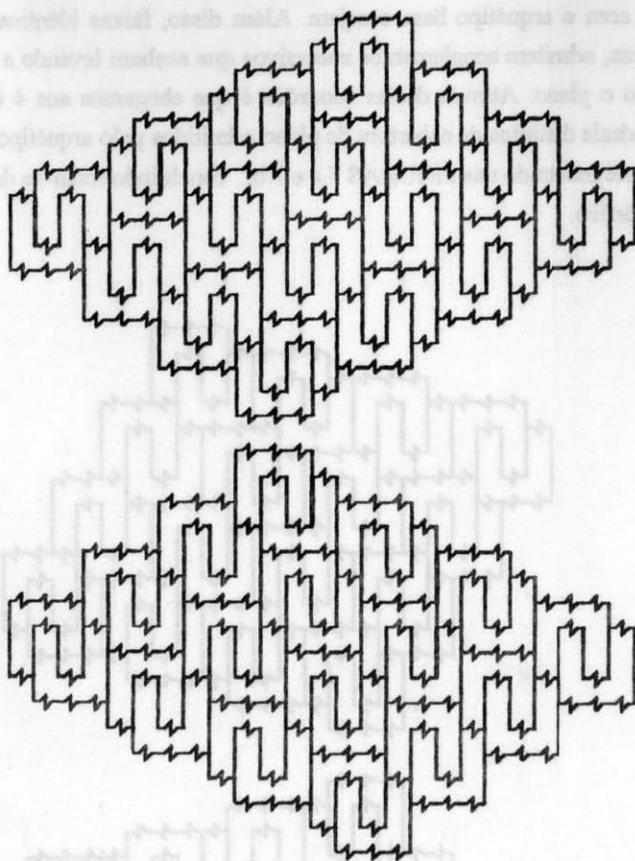


FIGURA 7.b Em 7.a e 7.b aparecem os 4 únicos padrões admitidos pelo arquétipo transformado via a técnica dos encaixes duplos.

2.2. Via a técnica do cisalhamento

Em seguida passamos à transformação tetramórfica via um cisalhamento do heptaminó em U. Visando facilitar a identificação dos 4 padrões distintos admitidos pelo novo arquétipo, exibimos, através da FIGURA 8, pares de padrões enantiomorfos, admitidos pelo heptaminó base, padrões esses bases para a transformação. Os dois padrões mostrados superiormente diferem dos dois padrões mostrados inferiormente.

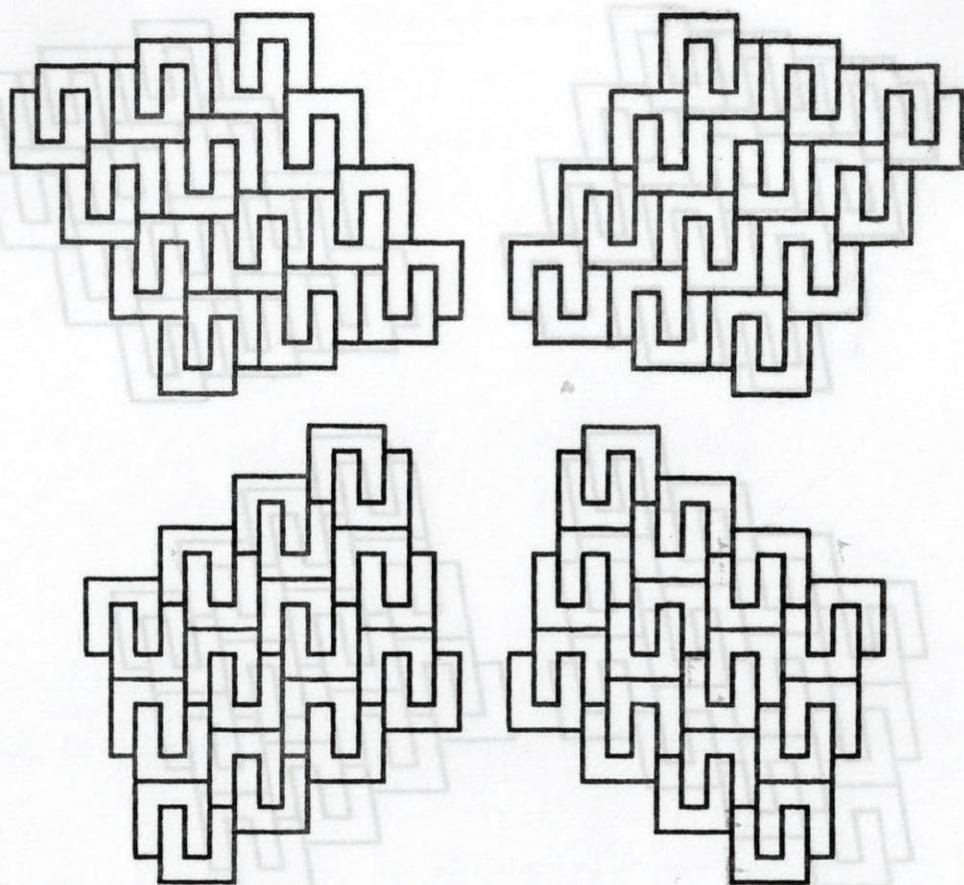


FIGURA 8. Pares de padrões enantiomorfos, base para a transformação tetramórfica via cisalhamento.

Impedindo adaptações senão aquelas que levam às faixas base para as faixas denteadas mostradas na FIGURA 6, o cisalhamento tem aqui a função de destruir o enantiomorfismo apresentado pelos padrões anteriores, acarretando a existência de 4 padrões distintos de pavimentação moedral do plano euclidiano, mostrados na FIGURA 9.

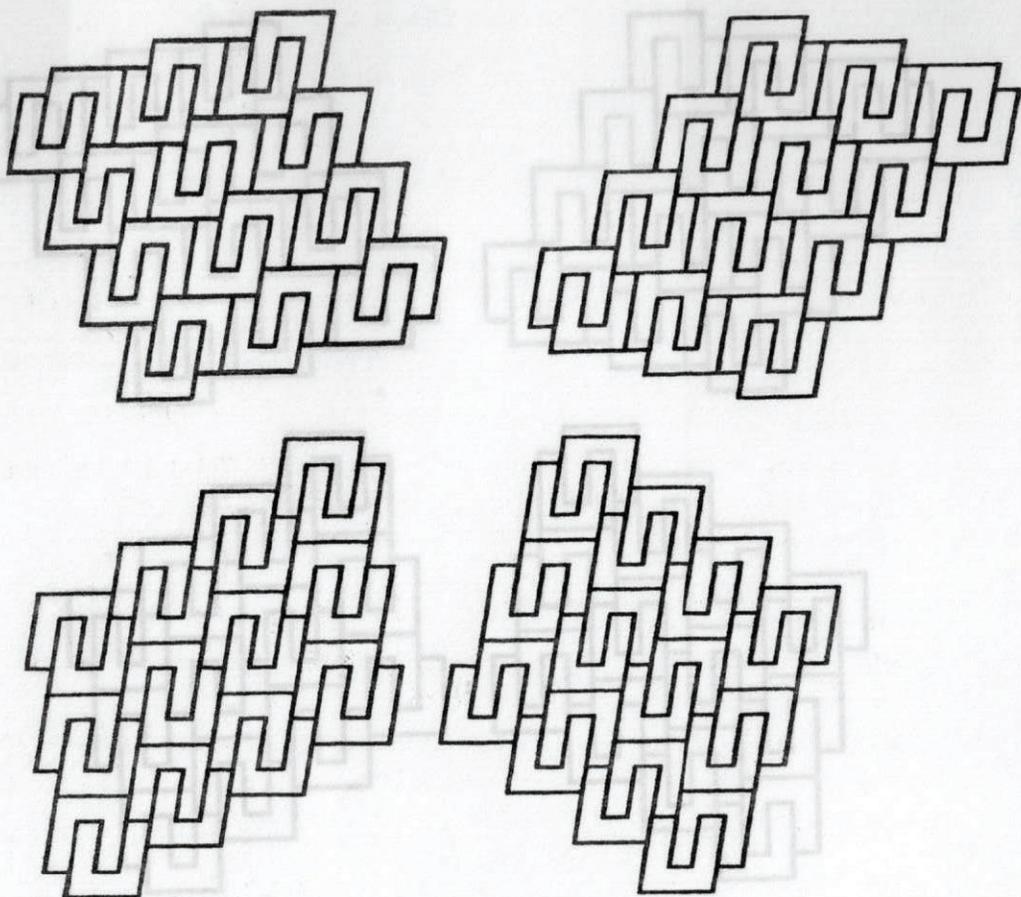


FIG 9. Os 4 únicos padrões monoedrais de pavimentação do plano, admitidos pelo heptaminó em U transformado via a técnica do cisalhamento.

III. BIBLIOGRAFIA

- BARBOSA, R.M. *Descobrendo padrões em mosaicos*. ed. São Paulo: Atual, 1.993. 126 p.
- BARBOSA, R.M., SILVA, E.A. Duas metodologias eficientes para obtenção de arquétipos dimórficos de pavimentação monoedra. *Bol. Mat.* FURB, Blumenau, 1.994. (No prelo.)
- FONTAINE, A., MARTIN, G.E. Tetramorphic and pentamorphic prototiles. *J. Comb. Theory, Serie A*, Orlando, v 34, p. 115-118, 1.983a.

- . Polymorphic prototiles. *J. Comb. Theory, Serie A, Orlando* v.34, p. 119-121, 1.983b.
- . An enneamorphic prototile. *J. Comb. Theory, Serie A, Orlando*, v. 37, p. 95-96, 1.984a.
- . Polymorphic polyominoes. *Math. Gazette*, n. 61, p. 275-283, 1.984b.
- MARTIN, G.E. *Polyominoes - a guide to puzzles and problems in tiling*. ed. N. York: The Mathematical Association of America, 1.991. 184 p.
- SILVA E.A., LOURENÇO, M.L., BARBOSA, R.M. Transformações monomórficas do triângulo equilátero: um tratamento geométrico e educacional. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 1.993, Bauru, *Anals...* Bauru: UNESP, 1.993. p. 90.
- SILVA, E.A., BARBOSA, R.M. *Transformações polimórficas de arquétipos monoedrais de pavimentação do plano euclidiano*. UNESP/IBILCE, 1.993. 45 p. (Notas de seminários.)
- SILVA, E.A. Dois novos arquétipos dimórficos para pavimentação monoedral, *Rev. Mat. Estat*, São Paulo, 1.994a. (No prelo.)
- SILVA, E.A. *Sobre a técnica de transformação polimórfica de arquétipos monoedrais por cisalhamento*. UNESP/IBILCE, 1.994b. 19 p. (A sair.)
- SILVA, E.A., LOURENÇO, M.L., BARBOSA, R.M. Um estudo geométrico das transformações monomórficas do triângulo equilátero com auxílio do Logo, *Métrica*, S.J. Rio Preto, 1.994. (No prelo.)

MÉTRICA - Estudos e Pesquisas em Matemática
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Endereço: Rua Cristovão Colombo, 2265 - C.P. 136

Fone (0172) 244966 - FAX (0172) 248692

15054-000 - São José do Rio Preto

SP - Brasil

COMISSÃO EDITORIAL

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Prof. Dr. Sebastião Antonio Izar

Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini

DIGITAÇÃO

Mitico Hayashi

MONTAGEM E GRAVAÇÃO

Maria Aparecida Azevedo de Marchi

SERVIÇO GRÁFICO

Alex Antonio dos Santos