



Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira

Socorro Rangel

Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

`antunes@ibilce.unesp.br`, `socorro@ibilce.unesp.br`, `saraujo@ibilce.unesp.br`

Grafos Planares

Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.



Grafos Planares

Definição e Exemplos

Nesta aula queremos responder à seguinte questão: Dado um grafo G , é possível encontrar uma representação gráfica para o grafo tal que não haja cruzamento de arestas?

Exemplo 1. Considere por exemplo o grafo K_4 representado graficamente nas figuras fig1, fig2 e fig3.

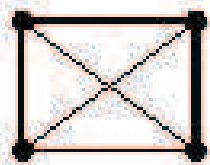


fig. 1

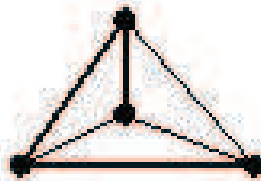


fig. 2



fig. 3



Definição 1. *Um grafo G é dito **planar** se puder ser representado graficamente no plano de tal forma que não haja cruzamento de suas arestas. Caso contrário o grafo é dito não-planar. Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar.*

Exemplo 2. *o grafo da fig 1 é um grafo planar, e os grafos exibidos nas Figuras 2 3 são grafos planos.*

Observação 1. *Se existir uma representação do grafo em uma superfície sem que haja cruzamento de arestas, dizemos que existe uma imersão do grafo na superfície.*

Questão 1. *Como determinar então se um dado grafo é planar?*

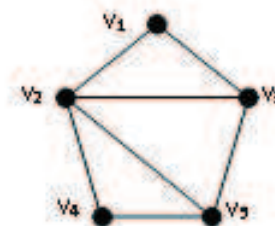
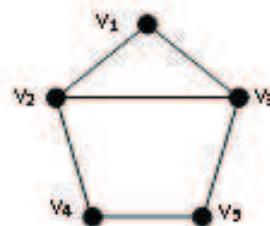
Grafos de Kuratowski

Existem dois grafos não planares que são muito importantes no estudo de planaridade. Estes dois grafos são chamados Grafos de Kuratowski e serão apresentados a seguir.

Teorema 1. *O grafo K_5 é um grafo não planar.*

Prova - para mostrar este teorema usaremos uma metodologia que pode ser bastante útil na obtenção de uma representação planar de um grafo planar ou na prova de que tal representação não pode ser encontrada. Vamos considerar o grafo K_5 . Sejam $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ os cinco vértices deste grafo. Como o grafo é completo, podemos encontrar um circuito hamiltoniano em G . Seja por exemplo o seguinte circuito:

Grafos de Kuratowski



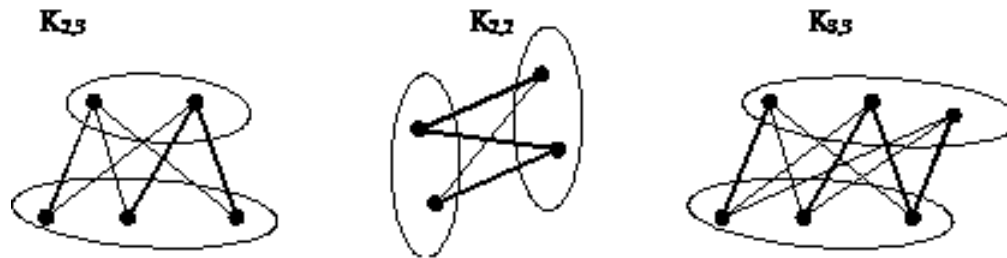
- a) Vamos acrescentar aresta (v_2, v_3)
- b) Acrescentando a aresta (v_2, v_5)
- c) Acrescentando as arestas (v_4, v_1) e (v_4, v_3) observamos que não temos escolha e que é necessário inclui-las externamente.
- d) Ao tentarmos incluir a última aresta do grafo (v_5, v_1) verificamos que não é possível inclui-la sem que haja cruzamento de arestas. Portanto o grafo K_5 é não planar.

Grafos de Kuratowski

Para apresentar o próximo grafo de Kuratowski vamos relembrar a definição de grafo bipartido.

Definição 2. Um grafo $G(V,A)$ é **bipartido** quando o seu conjunto de vértices, V , puder ser particionado em dois conjuntos $V1$ e $V2$ tais que toda aresta de G tem uma extremidade em $V1$ e outra em $V2$. Um grafo bipartido completo possui uma aresta para cada par de vértices $v_i \in V1$ e $v_j \in V2$. Se $n1$ é o número de vértices em $V1$ e $n2$ é o número de vértices em $V2$, o grafo bipartido completo é denotado por $K_{n1,n2}$.

Exemplo 3. Grafos bipartidos completos



Teorema 2. *O grafo $K_{3,3}$ é um grafo não planar.*

Prova: É possível demonstrar este teorema usando o mesmo argumento da prova do teorema anterior.

Questão 2. *O que estes dois grafos possuem em comum?*

- 1. São grafos regulares*
- 2. Os dois são não planares*
- 3. A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar*
- 4. K_5 é não planar com o menor número de vértices*
- 5. $K_{3,3}$ é não planar com o menor número de arestas*

Fórmula de Euler

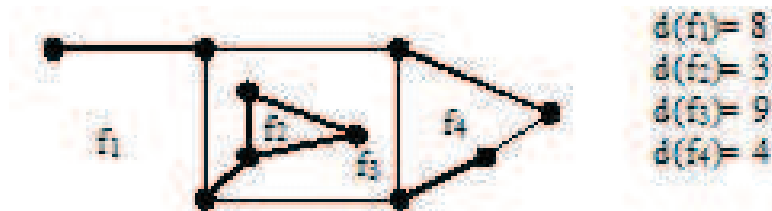
Observe nos grafos exibidos a seguir que um grafo plano divide o plano em diversas regiões, chamadas de faces.



1. O grau de uma face f_i ($d(f_i)$) é igual ao número de arestas contida na trilha fechada que a define.
2. O número de faces (f) de um grafo planar é sempre o mesmo e independe da representação planar obtida.
3. Como cada aresta de G pertence a no máximo duas faces distintas, ou esta incluída duas vezes na trilha fechada que define uma face, temos o seguinte resultado:
$$\sum_{i=1}^f d(f_i) = 2m$$

Fórmula de Euler

Exemplo 4. *Graus das faces de um grafo plano.*



O número de faces de um grafo também está relacionado com o número de arestas e vértices do grafo através do teorema abaixo.

Teorema 3. *Se G é um grafo conexo planar com m arestas e n vértices, então qualquer representação planar de G possui $f = m - n + 2$ faces.*

Fórmula de Euler

Questão 3. Quantas faces existem em grafo planar com 10 vértices, cada um dos vértices com grau 3? Inicialmente precisamos definir quantas arestas o grafo possui. $\sum_{i=1}^{10} d(v_i) = 2m \Rightarrow m = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$ Aplicando a fórmula de Euler: $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$, sabemos que o grafo terá 7 faces.

Fórmula de Euler

Corolário 1. *Seja G um grafo simples conexo planar com m arestas e n vértices, então: $m \leq 3n - 6, m > 1$.*

Prova: Observamos anteriormente que o grau de cada face é definido pelo número de arestas em uma trilha fechada. Em um grafo simples G uma trilha fechada é composta por pelo menos três arestas. Além disso, cada aresta pertence à no máximo duas faces de um grafo. Assim podemos estabelecer a seguinte relação:

$$2m = \sum_{i=1}^f d(f_i) \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f$$

$$\text{Logo } 2m \geq 3f \Rightarrow f \leq 2m/3$$

Usando esta relação na fórmula de Euler temos:

$$m - n + 2 \leq 2m/3 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Fórmula de Euler

Observação 2. *Observe que o grafo K_5 não satisfaz o corolário 1 e portanto não é planar. O grafo $K_{3,3}$ satisfaz o corolário porém não é planar. Assim temos uma condição necessária mas não suficiente.*

Questão 4. *Como fazer então para determinar se um dado grafo é planar?*

O algoritmo de redução, Procedimento 1, pode auxiliar nesta tarefa. Mas antes precisamos definir "arestas em série" e relembrar o conceito de fusão de arestas.

Definição 3. *Duas arestas estão em **série** se elas possuem exatamente um vértice em comum e este vértice tem grau dois.*

Definição 4. *A **fusão** de duas arestas incidentes em um vértice v_j , (v_i, v_j) e (v_j, v_k) , é feita eliminando as duas arestas e criando a aresta (v_i, v_k) .*



Procedimento 1 - Procedimento de redução

1. Passo 1 - Determine as componentes do grafo. $G = G_1, G_2, \dots, G_k$.
Teste cada componente G_i do grafo.
2. Passo 2 - Remova todos os loops
3. Passo 3 - Elimine as arestas paralelas, deixando apenas uma aresta entre cada par de vértices.
4. Passo 4 - Elimine os vértices de grau dois através da fusão de duas arestas. (Arestas em série não afetam a planaridade).
5. Repita os passos 3 e 4 enquanto for possível.

Exemplo 5. *Vamos aplicar o procedimento de redução ao seguinte grafo a seguir.*





De uma maneira geral, após aplicar o procedimento 1 a cada uma das componentes G_i , qual será o grafo reduzido, H_i ?

Teorema 4. *O grafo reduzido H_i é:*

- a) uma aresta; ou*
- b) um grafo completo com 4 vértices; ou*
- c) um grafo simples com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.*

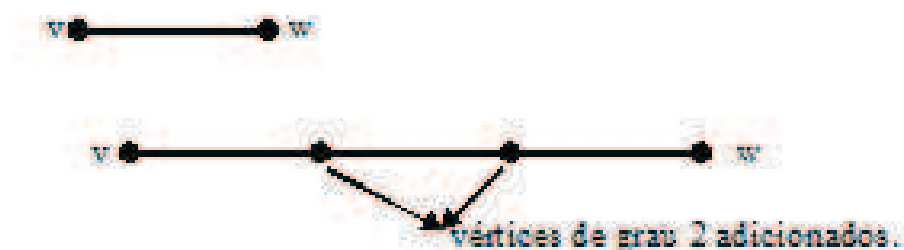
Se todos os grafos reduzidos H_i satisfizerem os itens a) ou b), o grafo G é planar. Caso contrário é necessário verificar se $m \leq 3n - 6$. Se o grafo reduzido não satisfaz esta inequação então o grafo G é não planar. Se a inequação for satisfeita, é necessário fazer testes adicionais.

Observação 3. *Usando o Procedimento 1 e o Teorema anterior podemos identificar claramente a planaridade de um grafo para casos onde o grafo tem menos que 5 vértices e menos que 7 arestas.*

Para grafos com $n \geq 5$ e $m \geq 7$ e que satisfaçam a condição do Corolário 1 precisamos de outros resultados.

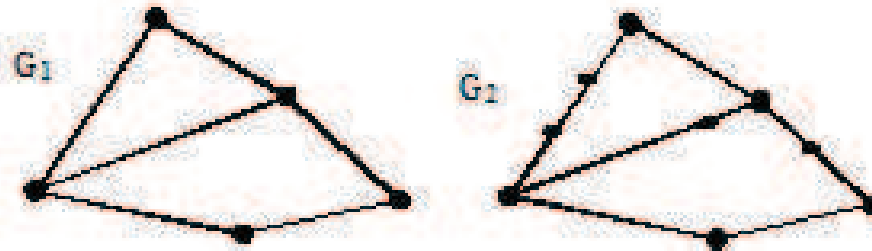
Definição 5. A *subdivisão* da aresta (v, w) de um grafo G é uma operação que transforma a aresta (v, w) em um caminho através da adição de vértices de grau 2.

Exemplo 6. *Subdivisão de uma aresta*



Definição 6. *Subdivisão de um grafo - Um grafo G_2 é uma subdivisão de um grafo G_1 quando G_2 puder ser obtido de G_1 através de uma sequência de divisões das arestas de G_1 .*

Exemplo 7. *Subdivisão de um grafo*

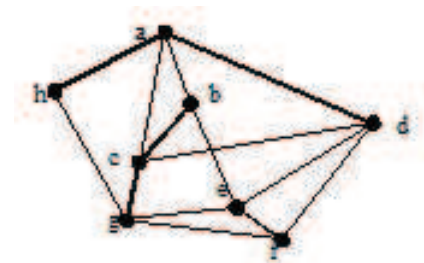


Observação 4. *Dizemos que G_2 é uma configuração de G_1 .*

O Teorema a seguir foi demonstrado pela primeira vez pelo matemático polonês Kuratowski em 1930.

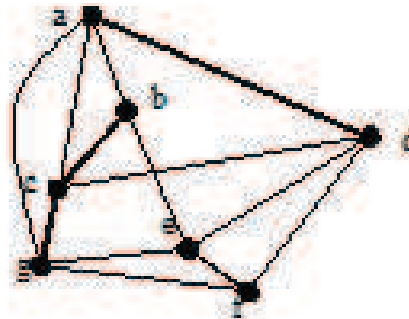
Teorema 5. *Um grafo G é planar se e somente se não contém um subgrafo que é uma configuração do grafo K_5 ou do grafo $K_{3,3}$.*

Exemplo 8. *Vamos verificar se o grafo abaixo é planar.*



Podemos aplicar o procedimento de redução pois o grafo contém vértices de grau 2. Vamos então eliminar o vértice h através da fusão das arestas (a, h) e (h, g) .

O grafo resultante após a aplicação do Procedimento de Redução é:

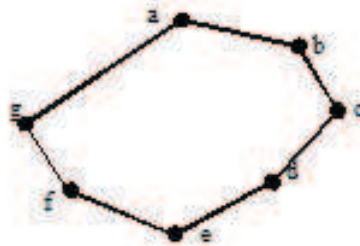


Vamos verificar o Corolário 1 ($m \leq 3n - 6 \Rightarrow 12 \leq 3(7) - 6 = 15$).
Como o grafo satisfaz o corolário não podemos afirmar nada.

Vamos então aplicar o procedimento de construção de circuitos e tentar obter uma representação planar para este grafo.

Vamos determinar o circuito mais longo neste grafo:

Seja o circuito: $\{a, b, c, d, e, f, g, a\}$:

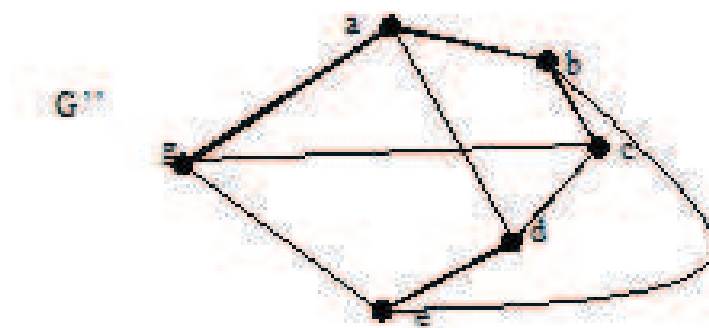


- 1- Vamos iniciar o procedimento inserindo, por exemplo, a aresta (a, d) .
- 2- Para inserir a aresta (b, e) temos apenas uma opção, inserir fora do circuito.
- 3- Observe agora que a aresta (c, g) não pode ser desenhada fora, ou dentro do circuito. Assim podemos dizer que o grafo dado não é planar.

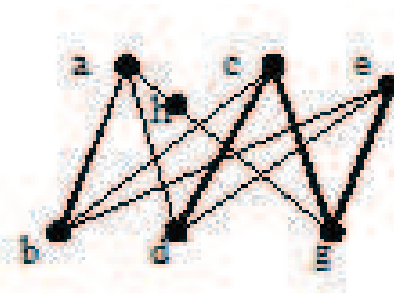


Vamos agora encontrar uma configuração do $K_{3,3}$ ou do K_5 no grafo G . De acordo com o teorema se o grafo é não planar devemos encontrar uma. Como fazer?

Para identificar a configuração do $K_{3,3}$ vamos eliminar do subgrafo G' os vértices de grau 2, através da fusão das arestas (g, f) e (f, e) .



O grafo reduzido G'' é o $K_{3,3}$. Basta tomar $V1 = \{a, c, e\}$ e $V2 = \{b, d, g\}$. O subgrafo de G que é uma configuração do $K_{3,3}$ é então:





Algoritmos para verificar se uma dado grafo é planar e em caso positivo exibir uma representação planar do grafo:

- 1) Algoritmo de Hopcroft e Tarjan em 'Teoria do grafos - Algoritmos', Antonio Luiz Furtado, Livros Técnicos e científicos editora, 1973.
- 2) Algoritmo de Demoucron et al. em: 'Algorithmic Graph Theory', J.A. Machugh, Prentice Hall, 1990.
- 3) Algoritmos Lineares para Teste de Planaridade em Grafos, Edna Ayako Hoshino. Dissertação de Mestrado, UFMS, disponível em: http://facom.sites.ufms.br/files/2015/12/2002___edna_ayako.pdf (última visita: 30/05/2016).
- 4) Teste de planaridade e seus principais algoritmos, José Coelho de Pina, IME-USP. disponível em: <http://www.ime.usp.br/~coelho/sh/introp.html#hopcroft:jacm-21-549> (ultima visita: 30/05/2016).