

Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira, Socorro Rangel, Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

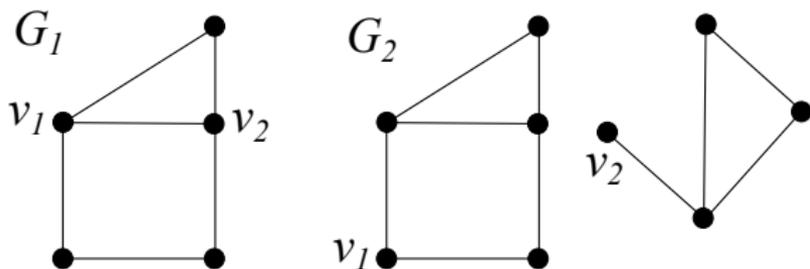
Capítulo 5: Grafos Conexos

Preparado a partir do texto:

Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

1 Grafos Conexos

Considere os grafos abaixo:



E possível achar um caminho entre os vértices v_1 e v_2 ?

Definição

Um grafo é dito **conexo** se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices do grafo. Caso contrário, o grafo é chamado de desconexo.

O grafo G_1 acima é conexo, e o grafo G_2 é desconexo.

Cada um dos subgrafos conexos maximais de um grafo desconexo é chamado de uma **componente** do grafo. Ou seja, uma componente é um subgrafo conexo que não esteja estritamente contido em outros subgrafos conexos. ¹

Dado um grafo qualquer, como determinar se o grafo é conexo?

Teorema

Um grafo $G(V, A)$ é desconexo se, e somente se, seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois conjuntos disjuntos e não-vazios, V_1 e V_2 , de forma que não exista uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2 .

¹Sejam S e S' tais que $S' \subset S$. S' é maximal em relação a uma propriedade P quando S' satisfaz P e não existe $S'' \supset S'$ que também satisfaça P . 

Cada um dos subgrafos conexos maximais de um grafo desconexo é chamado de uma **componente** do grafo. Ou seja, uma componente é um subgrafo conexo que não esteja estritamente contido em outros subgrafos conexos. ¹

Dado um grafo qualquer, como determinar se o grafo é conexo?

Teorema

Um grafo $G(V, A)$ é desconexo se, e somente se, seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois conjuntos disjuntos e não-vazios, V_1 e V_2 , de forma que não exista uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2 .

¹Sejam S e S' tais que $S' \subset S$. S' é maximal em relação a uma propriedade P quando S' satisfaz P e não existe $S'' \supset S'$ que também satisfaça P . 

Demonstração

[\Rightarrow] Suponhamos que G seja desconexo e mostremos que existe uma partição de V , V_1 e V_2 , tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2 .

Seja G um grafo desconexo. Precisamos encontrar uma partição de V que satisfaça a propriedade acima.

Considere um vértice $v \in V$ qualquer. Forme o conjunto V_1 com todos os vértices de V que estejam ligados a v por um caminho.

Como G é desconexo, V_1 não contém todos os vértices de G . Assim os vértices restantes formam um conjunto não-vazio V_2 , e não existe nenhuma aresta de G com uma extremidade em V_1 e outra em V_2 .

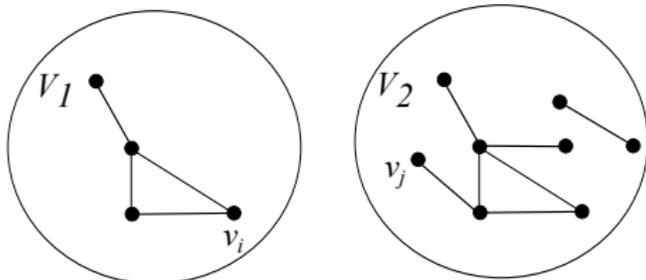
Portanto V_1 e V_2 formam a partição desejada.

[\Leftarrow] Suponhamos que exista uma partição de V , V_1 e V_2 , tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2 e mostremos que G é desconexo.

Considere dois vértices arbitrários $v, w \in V$ tais que $v \in V_1$ e $w \in V_2$.

Não pode existir nenhum caminho entre v e w , pois se existisse, haveria uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra em V_2 .

Portanto se uma tal partição existe o grafo é desconexo. □



Questão: Qual é o número máximo de arestas que um grafo simples com n vértices pode ter?

Cada vértice pode ser ligado por uma aresta a cada um dos outros vértices do grafo, isto é, aos outros $(n - 1)$. Isto nos dá $(n - 1)$ arestas. Com existem n vértices, teremos então $n(n - 1)$ arestas. No entanto, cada aresta interliga dois vértices e portanto está sendo considerada duas vezes. Assim, para obtermos o número correto de arestas é necessário dividir o valor que temos até o momento por 2. O número máximo de arestas é então:

$$n(n - 1)/2.$$

Teorema

Seja G um grafo simples com n vértices. Se G possui k componentes, então o número m de arestas de G satisfaz

$$n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2.$$

Demonstração

Vamos provar que $m \geq n - k$ por indução sobre o número de arestas de G .

É claro que o resultado é verdadeiro para um grafo nulo ($m = 0$).

Suponha que a desigualdade é verdadeira para todo grafo com menos do que m_0 arestas, onde m_0 é um inteiro positivo.

Vamos supor ainda, sem perda de generalidade, que G possui o menor número de arestas possível, no sentido de que a retirada de qualquer aresta de G aumenta o número de componentes em uma unidade.

Neste caso, o grafo resultante teria os mesmos n vértices, $k + 1$ componentes e $m_0 - 1$ arestas.

Segue da hipótese de indução que

$$m_0 - 1 \geq n - (k + 1) \Leftrightarrow m_0 \geq n - k.$$

Agora mostremos que vale a segunda desigualdade, supondo, sem perda de generalidade, que cada componente de G é um grafo completo.

Suponhamos que existam dois componentes C_i e C_j com n_i e n_j vértices, respectivamente, onde $n_i \geq n_j > 1$.

Se trocarmos C_i e C_j por grafos completos com $n_i + 1$ e $n_j - 1$ vértices, então o número total de vértices permanece o mesmo, e o número de arestas é alterado por

$$\frac{(n_i + 1)n_i - n_i(n_i - 1)}{2} - \frac{n_j(n_j - 1) - (n_j - 1)(n_j - 2)}{2} = n_i - n_j + 1 > 0.$$

Segue que, para que o número máximo de arestas seja atingido, G deve consistir de um grafo completo com $n - (k - 1)$ vértices e $k - 1$ vértices isolados. □

Exemplo

Para $n = 6$ e $k = 2$:

- (a) Componente 1: K_4 , Componente 2: uma aresta;*
- (b) Componente 1: K_3 , Componente 2: K_3 ;*
- (c) Componente 1: K_5 , Componente 2: 1 vértice.*

Exercícios:

- 1 Desenhe um grafo conexo que se torna desconexo quando qualquer aresta é removida.
- 2 Mostre que um grafo conexo $G(V, A)$ se mantém conexo após a remoção de uma aresta $a \in A$ se, e somente se, a aresta pertence a algum circuito de G .
- 3 Mostre que qualquer grafo simples com n vértices e mais do que $(n - 1)(n - 2)/2$ arestas é conexo.