Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira, Socorro Rangel, Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

Capítulo 07: Grafos Direcionados

Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

Outline

Introdução

- Até o momento trabalhamos com grafos tais que as arestas são pares não ordenados de vértices.
- Várias situações práticas requerem que associemos sentido às arestas do grafo.
- Por exemplo, considere um grafo representando as ruas de uma cidade. Nem todas as ruas são de mão dupla. Ao se estudar rotas de ônibus é necessário considerar se as ruas são de mão única, isto é, permitem fluxo apenas no sentido (v_i, v_j) ou se são de mão dupla.
- Outras situações são: fluxograma de programas computacionais onde os vértices representam instruções e as arestas a sequência de execução; redes elétricas; fluxos em redes que possuem válvulas nos encanamentos.
- Quando associamos sentido às arestas do grafo temos um **grafo direcionado** ou **digrafo**.

Introdução

- A maioria dos conceitos e terminologia usados para grafos não-orientados são também aplicáveis para digrafos.
- Por exemplo, o conceito de planaridade independe do sentido associado às arestas.

Vamos chamar atenção neste tópico apenas para as propriedades e conceitos que se aplicam apenas a digrafos.

O conceito formal de um grafo direcionado é dado a seguir.

Digrafos

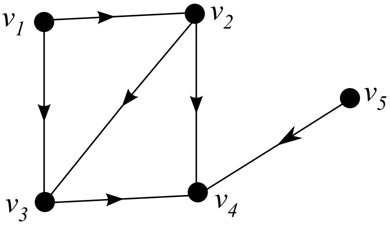
Definição

Um ***grafo direcionado*** $G(V,A)$ *é constituído por um conjunto* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *não-vazio de objetos, chamados vértices (ou nós), e um conjunto* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *de arestas ou arcos, e uma aplicação* Ψ *que associa cada aresta a um par ordenado de vértices.*

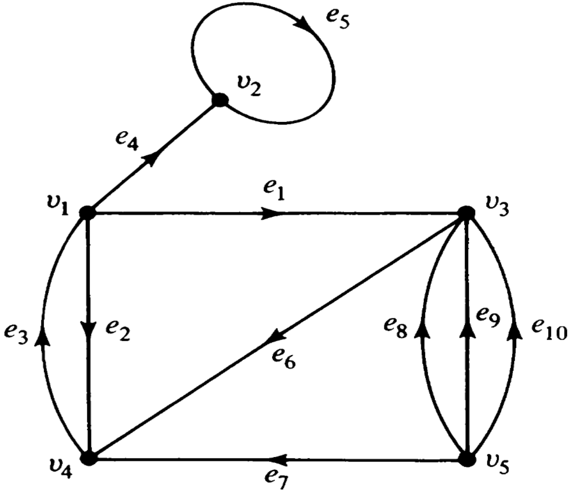
Os digrafos são representados através de um diagrama onde os vértices são representados por pontos e cada aresta (v_i, v_j) é representada por uma linha ligando v_i a v_j com uma seta apontando para v_j.

Exemplo 1

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$
$$A = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_5, v_4), (v_2, v_3)\}.$$



Exemplo 2



Ψ?

Grau de vértices

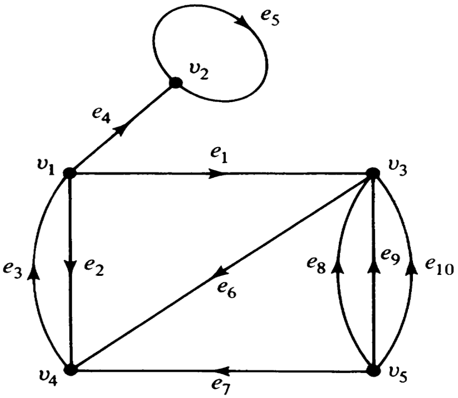
Em um digrafo, quando dizemos que uma aresta é incidente a um vértice queremos saber em que sentido, isto é, se a aresta é convergente ou divergente a este vértice.

É natural dizer que uma aresta a associada ao par (v_i, v_j) é convergente a v_j e divergente de v_i.

Em relação ao grau de um vértice v_i queremos também saber:

- o número de arestas convergentes, chamado **grau de entrada** e denotado $d_e(v_i)$ (ou $d^-(v_i)$);
- o número de arestas divergentes, chamado **grau de saída** e denotado $d_s(v_i)$ (ou $d^+(v_i)$).

Exemplo



$$d_s(v_1) = 3, \quad d_e(v_1) = 1;$$
$$d_s(v_2) = 1, \quad d_e(v_2) = 2;$$
$$d_s(v_5) = 4, \quad d_e(v_5) = 0.$$

Exercício

Seja $G(V, A)$ um digrafo. Mostre que

$$\sum_{v_i \in V} d_e(v_i) = \sum_{v_i \in V} d_s(v_i) = m,$$

onde m é o número de arestas de G.

Mais definições:

- Temos uma **fonte** quando o grau de entrada é nulo e um **sumidouro** quando o grau de saída é nulo.
- Duas arestas são **paralelas** se elas incidem nos mesmos vértices e possuem a mesma orientação.
- Muitas das propriedades de grafos não orientados são válidas para digrafos e portanto muitas vezes a orientação do grafo é desconsiderada.
- Definimos o **grafo associado** a um digrafo G como sendo o grafo obtido desconsiderando a orientação de G.

Orientação de um grafo

A operação oposta também pode ser considerada:

Dado um grafo (não orientado) G podemos definir alguma orientação para suas arestas obtendo assim um digrafo $\vec{G}$ chamado de *um* **digrafo associado** a G.

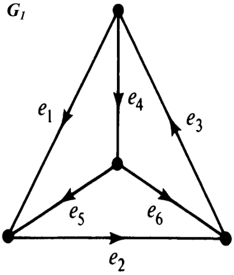
- Observemos que enquanto o grafo associado a um digrafo é único (a menos de isomorfismos), um digrafo associado a um grafo pode ter várias orientações distintas.

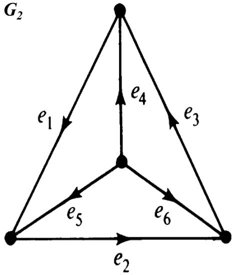
Digrafos Isomorfos

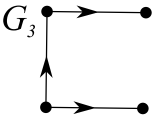
Dados digrafos G e H, dizemos que eles são **isomorfos** quando os grafos associados são isomorfos e além disso a orientação das arestas coincide.

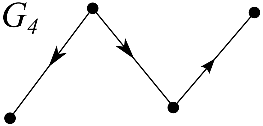
Exercício

Verifique se os pares de digrafos abaixo (G_1 e G_2, G_3 e G_4) são isomorfos.









Tipos de digrafos

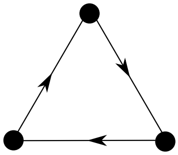
Seja $G(V, A)$ um digrafo. Então G é dito:

- **Simples** se não possui *loops* ou arestas paralelas;
- **Assimétrico** se possui no máximo uma aresta orientada entre cada par (não-ordenado) de vértices;
  - Grafos assimétricos podem ter *loops*;
- **Simétrico** se para cada aresta (a, b) existe também uma aresta (b, a);

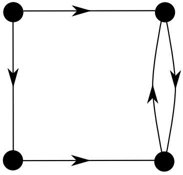
Tipos de digrafos (cont.)

- **Completo Simétrico** se G é simples e existe exatamente uma aresta direcionada de todo vértice para todos os outros vértices;
- **Completo Assimétrico** se G é assimétrico e existe exatamente uma aresta entre cada par (não-ordenado) de vértices;
- **Balanceado** se $d_e(v_i) = d_s(v_i)$ para todo $v_i \in V$;
- **Regular** se existe um inteiro k tal que tal que $d_e(v_i) = d_s(v_i) = k$ para todo $v_i \in V$. Dizemos que o digrafo é k-regular.

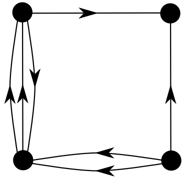
Exemplos



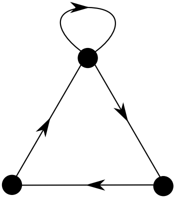
(a) Digrafo simples



(b) Digrafo simples

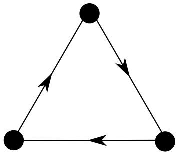


(c) Digrafo não-simples

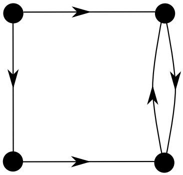


(d) Digrafo não-simples

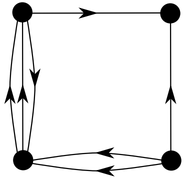
Exemplos



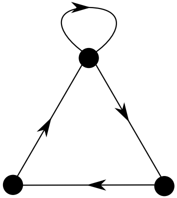
(e) Digrafo assimétrico



(f) Digrafo não-assimétrico

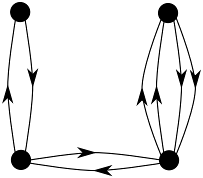


(g) Digrafo não-assimétrico

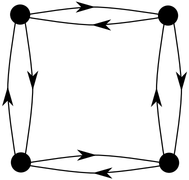


(h) Digrafo assimétrico

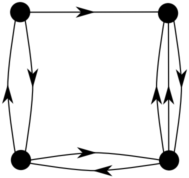
Exemplos



(i) Digrafo simétrico

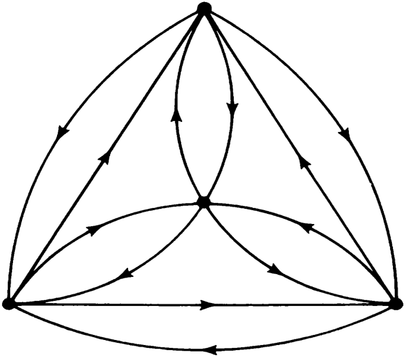


(j) Digrafo simétrico

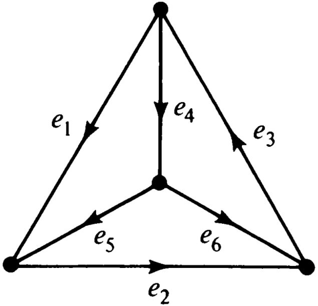


(k) Digrafo não-simétrico

Exemplos

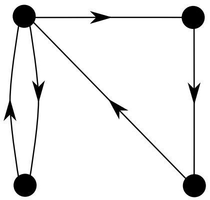


(l) Digrafo completo simétrico

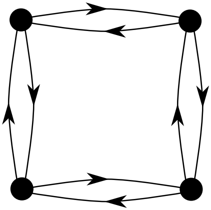


(m) Digrafo completo assimé-trico

Exemplos



(n) Digrafo balance-ado



(o) Digrafo regular

Exercícios

1. Mostre que um digrafo completo assimétrico com n vértices possui $n(n-1)/2$ arestas.

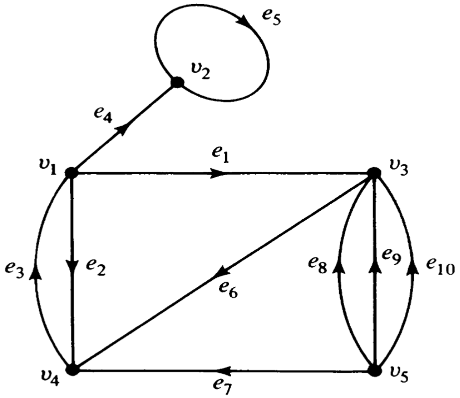
2. Mostre que um digrafo completo simétrico com n vértices possui $n(n-1)$ arestas.

Caminhos Orientados

- Definimos passeios da mesma forma que para grafos. No entanto, a orientação das arestas deve coincidir: isto é, dado um par de arestas consecutivas onde v é o vértice comum, a primeira aresta converge para v enquanto a segunda diverge de v. Neste caso podemos chamar a sequência de passeio orientado, ou simplesmente passeio.
- Quando a orientação das arestas não coincide, dizemos que a sequência é um semi-passeio.
- De forma similar definimos trajetos, semi-trajetos, caminhos, semi-caminhos, circuitos e semi-circuitos.

Exercício

Construir um passeio, um semi-passeio, um trajeto, um semi-trajeto, um caminho, um semi-caminho, um circuito e um semi-circuito para o digrafo abaixo:

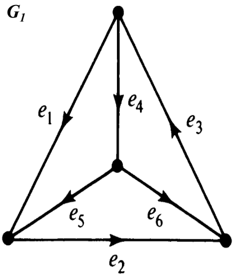


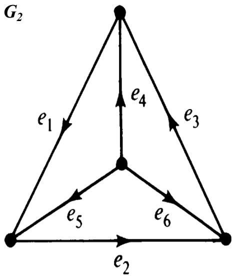
Digrafos Conexos

Definição

Um digrafo $D(V, A)$ é ***fortemente conexo*** *se existe um caminho orientado de v_i para v_j e de v_j para v_i, quaisquer que sejam $v_i, v_j \in V$.*

Um digrafo $D(V, A)$ é ***fracamente conexo*** *se o grafo associado é conexo mas D não é fortemente conexo.*





Propriedades

Um digrafo é dito ser **acíclico** se não possui circuitos.

- Um digrafo é acíclico se, e somente se, todo trajeto orientado é também um caminho orientado.
- Todo digrafo acíclico possui pelo menos uma fonte e um sumidouro.

Exercícios:

1. Encontre exemplos que ilustrem as propriedades acima.
2. Demonstre as propriedades acima.