Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira, Socorro Rangel, Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

Capítulo 16: Grafos Planares

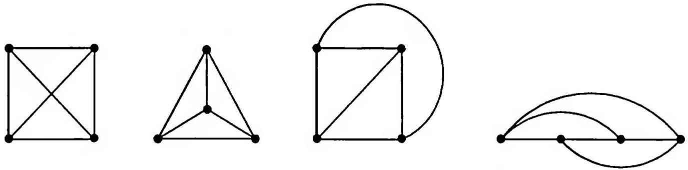
Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

Introdução

Nesta aula queremos responder à seguinte questão:

Dado um grafo G, é possível encontrar uma representação gráfica para o grafo tal que não haja cruzamento de arestas?

Considere por exemplo o grafo K_4 representado graficamente na figura abaixo.



Definição e exemplo

Definição

Um grafo G é dito ***planar*** *se puder ser representado graficamente no plano de tal forma que não haja cruzamento de suas arestas, exceto nos vértices aos quais elas são incidentes.*

Caso contrário, o grafo é dito não-planar.

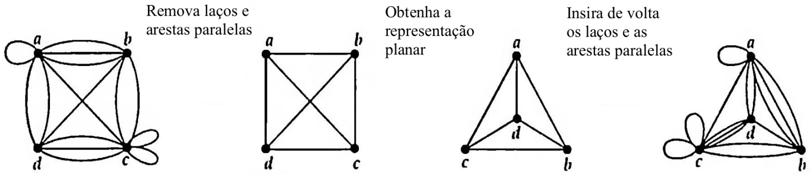
Usaremos o termo grafo plano para uma representação planar de um grafo planar.

Exemplo

O grafo à esquerda na figura anterior é um grafo planar; os outros grafos exibidos na mesma figura são grafos planos.

Observação

No estudo de grafos planares podemos restringir a atenção a grafos simples.



Observação

Se existir uma representação do grafo em uma superfície sem que haja cruzamento de arestas, dizemos que existe uma imersão do grafo na superfície.

Questão

Como determinar então se um dado grafo é planar?

Grafos de Kuratowski

Existem dois grafos não planares que são muito importantes no estudo de planaridade. Estes dois grafos são chamados Grafos de Kuratowski e serão apresentados a seguir.

Teorema

O grafo K_5 é um grafo não-planar.

Demonstração.

(Para demonstrar este teorema usaremos uma metodologia que pode ser bastante útil na obtenção de uma representação planar de um grafo planar ou na prova de que tal representação não pode ser encontrada.)

Vamos considerar o grafo $G = K_5$. Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 os cinco vértices deste grafo. Como o grafo é completo, podemos encontrar um circuito hamiltoniano em G.

Grafos de Kuratowski

Demonstração cont.

a) Seja, por exemplo, o seguinte circuito: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

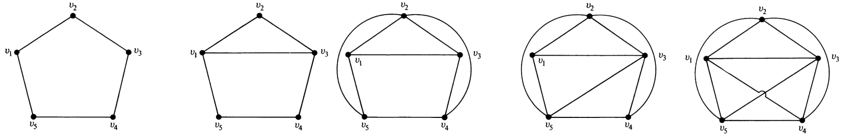
b) Vamos acrescentar aresta (v_1, v_3);

c) Ao acrescentar as arestas (v_2, v_5) e (v_2, v_4), observamos que não temos escolha e que é necessário inclui-las externamente;

d) A aresta (v_3, v_5) pode ser acrescentada internamente;

e) Ao tentarmos incluir a última aresta do grafo (v_1, v_4) verificamos que não é possível inclui-la sem que haja cruzamento de arestas.

Portanto o grafo K_5 é não-planar. $\square$



(a) (b) (c) (d) (e)

Grafos bipartidos

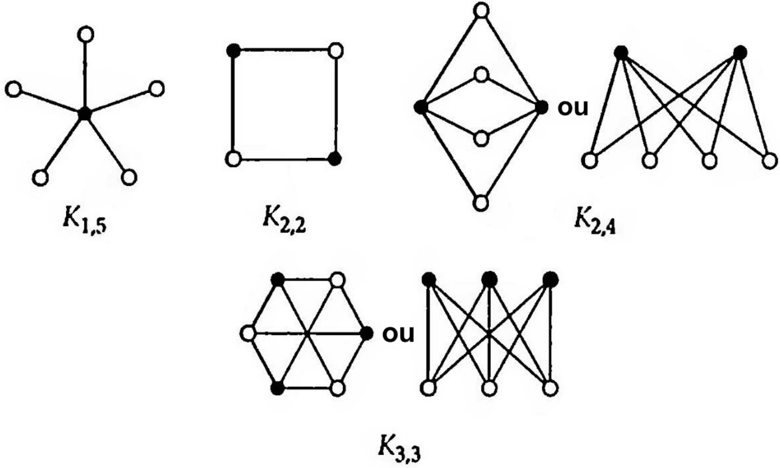
Para apresentar o próximo grafo de Kuratowski vamos relembrar a definição de grafo bipartido.

Definição

*Um grafo $G(V, A)$ é **bipartido** quando o seu conjunto de vértices, V, puder ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2.*

Um grafo bipartido completo possui uma aresta para cada par de vértices $v_i \in V_1$ e $v_j \in V_2$. Se n_1 é o número de vértices em V_1 e n_2 é o número de vértices em V_2, o grafo bipartido completo é denotado por K_{n_1,n_2}.

Grafos bipartidos completos



Grafos de Kuratowski

Teorema

O grafo $K_{3,3}$ é um grafo não-planar.

Demonstração.

É possível demonstrar este teorema usando o mesmo argumento da prova do teorema anterior. $\square$

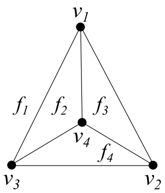
Questão

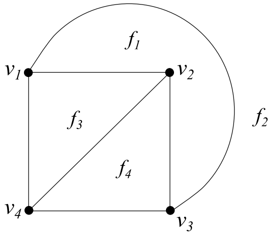
O que estes dois grafos K_5 e $K_{3,3}$ possuem em comum?

1. *São grafos regulares;*
2. *Os dois são não-planares;*
3. *A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar;*
4. *K_5 é não-planar com o menor número de vértices;*
5. *$K_{3,3}$ é não-planar com o menor número de arestas.*

Faces de um grafo

Observe que um grafo plano divide o plano em diversas regiões:





Definição

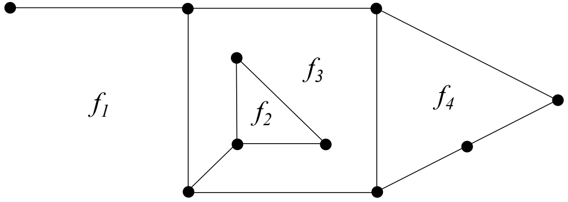
Se G é um grafo planar, então toda representação planar de G divide o plano em regiões, chamadas ***faces****.*

Uma destas faces é ilimitada, e é chamada ***face infinita****.*

Se f é uma face qualquer, o grau de f, denotado por $d(f)$, é igual ao número de arestas contida na trilha fechada que a define.

Exemplo

Graus das faces de um grafo plano:



- $d(f_1) = 8$;
- $d(f_2) = 3$;
- $d(f_3) = 9$;
- $d(f_4) = 4$.

Lema

Seja G um grafo planar com m arestas e f faces. Então,

$$\sum_{i=1}^{f} d(f_i) = 2m.$$

Demonstração.

Como cada aresta de um grafo G pertence a no máximo duas faces distintas ou está incluída duas vezes na trilha fechada que define uma face, o resultado segue. $\square$

Fórmula de Euler

O número de faces de um grafo também está relacionado com o número de arestas e vértices do grafo através do teorema abaixo.

Teorema

Se G é um grafo conexo planar com m arestas e n vértices, então qualquer representação planar de G possui $f = m - n + 2$ faces.

Demonstração.

A prova será feita por indução no número de faces f.

Se $f = 1$, então G não possui ciclos, ou seja, G é uma árvore. Temos que $m - n + 2 = (n - 1) - n + 2 = 1 = f$. Logo, o resultado vale para $f = 1$.

Suponha que o resultado vale para grafos com menos que f faces. Seja G um grafo conexo planar com $f > 1$ faces.

Demonstração cont.

Escolha uma aresta e de G que não seja uma ponte (se tal aresta não existe, G seria uma árvore; vimos que o resultado vale para árvores). Considere o grafo $H = G - e$.

Como e não é uma ponte, a sua remoção mantém o grafo conexo. Assim, e necessariamente pertence a um ciclo. Logo, a remoção de e une duas regiões, de modo que o número de faces é reduzido em uma unidade.

Como H possui menos que f faces, segue da hipótese de indução que $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, de onde segue o resultado. $\square$

Observação

O número f de faces de um grafo planar é sempre o mesmo e independe da representação planar obtida.

Fórmula de Euler

Questão

Quantas faces existem em grafo planar com 10 vértices, cada um dos vértices com grau 3?

Inicialmente precisamos definir quantas arestas o grafo possui:

$$\sum_{i=1}^{10} d(v_i) = 2m \Rightarrow m = \frac{10 * 3}{2} = 15.$$

Aplicando a fórmula de Euler, $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$, sabemos que o grafo terá 7 faces.

Fórmula de Euler

Corolário

Seja G um grafo simples, conexo e planar com m arestas e $n \geq 3$ vértices. Então, $m \leq 3n - 6$.

Demonstração.

Como G é simples, conexo e planar com $n \geq 3$, o grau de cada face é no mínimo 3. Assim,

$$2m = \sum_{i=1}^{f} d(f_i) \geq \sum_{i=1}^{f} 3 = 3f.$$

Logo, $m - n + 2 = f \leq 2m/3$, de modo que, $m \leq 3n - 6$. $\square$

Exercício

Seja G um grafo simples, conexo e planar com m arestas e $n \geq 3$ vértices. Então, G possui ao menos um vértice v tal que $d(v) \leq 5$.

Observação

Observe que o grafo K_5 não satisfaz o corolário anterior e portanto não é planar.

O grafo $K_{3,3}$ satisfaz o corolário, porém não é planar.

Assim temos uma condição necessária mas não suficiente.

Questão

Como fazer então para determinar se um dado grafo é planar?

Fórmula de Euler

Corolário

Seja G um grafo simples, conexo e planar com m arestas, n vértices e nenhum circuito de tamanho 3. Então, $m \leq 2n - 4$.

Demonstração.

Como G é simples, conexo, planar e não possui triângulos, o grau de cada face é no mínimo 4. Assim,

$$2m = \sum_{i=1}^{f} d(f_i) \geq \sum_{i=1}^{f} 4 = 4f.$$

Logo, $m - n + 2 = f \leq m/2$, de modo que, $m \leq 2n - 4$. $\square$

Observação

O grafo $K_{3,3}$ não satisfaz o corolário e portanto não é planar.

Aqui temos uma outra condição necessária. É suficiente?

Questão

Como fazer então para determinar se um dado grafo é planar?

O algoritmo de redução (Procedimento 1, a seguir) pode auxiliar nesta tarefa.

Mas antes precisamos definir "arestas em série" e relembrar o conceito de fusão de arestas.

Definição

*Duas arestas estão em **série** se elas possuem exatamente um vértice em comum e este vértice tem grau dois.*

Definição

*A **fusão** de duas arestas incidentes em um vértice v_j, (v_i, v_j) e (v_j, v_k), é feita eliminando-se as duas arestas e criando a aresta (v_i, v_k).*

Procedimento 1 – Procedimento de redução

Passo 1: Determine as componentes do grafo.
$G = G_1, G_2, ..., G_k$.
Teste cada componente G_i do grafo.

Passo 2: Remova todos os loops.

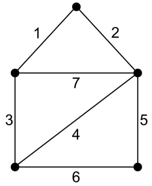
Passo 3: Elimine as arestas paralelas, deixando no máximo uma aresta entre cada par de vértices.

Passo 4: Elimine os vértices de grau dois através da fusão de duas arestas.
(Arestas em série não afetam a planaridade).

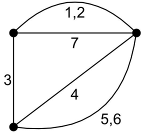
Passo 5: Repita os passos 3 e 4 enquanto for possível.

Exemplo

Vamos aplicar o procedimento de redução ao seguinte grafo:

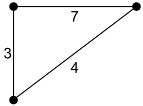


Passo 1: $G_1 = G$.
Passo 2: G_1 não possui loops.
Passo 3: G_1 não possui arestas paralelas.
Passo 4: Vamos fazer a fusão das arestas 1 e 2 e das arestas 5 e 6:

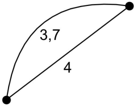


Exemplo cont.

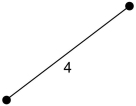
Repetindo: Passo 3: Vamos remover as arestas 1,2 e 5,6.



Passo 4: Temos



Repetindo: Passo 3: Temos o seguinte grafo reduzido:



De uma maneira geral, após aplicar o Procedimento 1 a cada uma das componentes G_i, qual será o grafo reduzido, H_i?

Teorema (N. Deo, Graph Theory)

O grafo reduzido H_i é:

a) *uma aresta; ou*
b) *um grafo completo com 4 vértices; ou*
c) *um grafo simples com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.*

Demonstração.

Exercício.
(O teorema pode ser provado considerando todos os grafos conexos simples com seis arestas ou menos.) $\square$

Se todos os grafos reduzidos H_i satisfizerem os itens a) ou b), o grafo G é planar.

Caso contrário é necessário verificar se $m \leq 3n - 6$ ou $m \leq 2n - 4$.

Se o grafo reduzido não satisfaz uma (ou ambas) destas inequações então o grafo G é não planar.

Se as inequações forem satisfeitas, é necessário fazer testes adicionais.

Observação

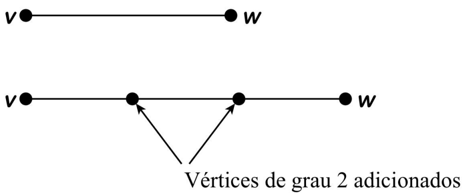
Usando o Procedimento 1 e o teorema anterior podemos identificar claramente a planaridade de um grafo para casos onde o grafo tem menos que 5 vértices e menos que 7 arestas.

Para grafos com $n \geq 5$ e $m \geq 7$ e que satisfaçam a condição dos corolários precisamos de outros resultados.

Definição

*A **subdivisão** da aresta (v, w) de um grafo G é uma operação que transforma a aresta (v, w) em um caminho através da adição de vértices de grau 2.*

Exemplo: Subdivisão de uma aresta:



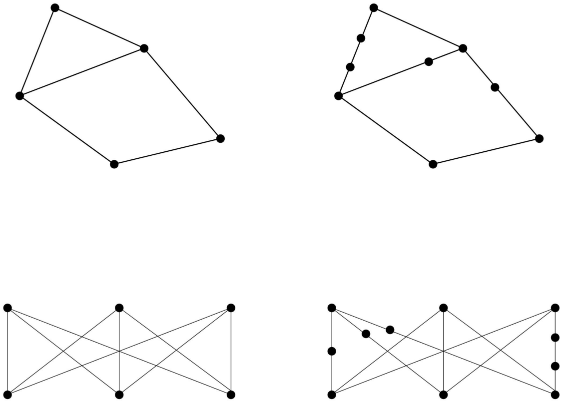
Subdivisão de um grafo

Definição

Um grafo G_2 *é uma* ***subdivisão*** *de um grafo* G_1 *quando* G_2 *puder ser obtido de* G_1 *através de uma sequência de divisões das arestas de* G_1*.*

Dizemos que G_2 *é uma* ***configuração*** *de* G_1*.*

Exemplos: Subdivisão de um grafo



Teorema de Kuratowski

O Teorema a seguir foi demonstrado pela primeira vez pelo matemático polonês Kuratowski em 1930.

Teorema

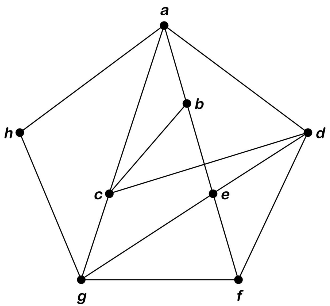
Um grafo G é planar se, e somente se, não contém um subgrafo que é uma configuração do grafo K_5 ou do grafo $K_{3,3}$.

Demonstração.

Ver, por exemplo, C. Berge, The Theory of Graphs and its Applications. $\square$

Exemplo

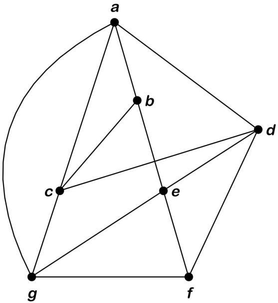
Vamos verificar se o grafo abaixo é planar.



Podemos aplicar o procedimento de redução pois o grafo contém vértices de grau 2. Vamos então eliminar o vértice h através da fusão das arestas (a, h) e (h, g).

O grafo resultante após a aplicação do procedimento de redução é:

Exemplo cont.

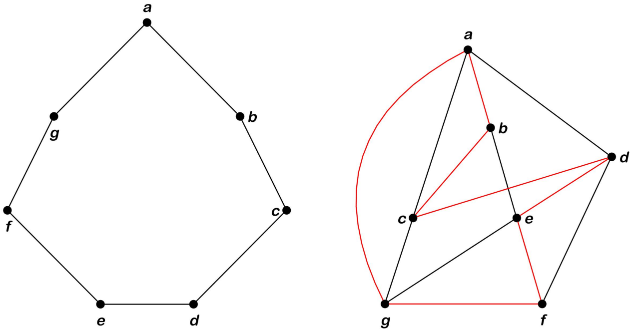


Vamos verificar o primeiro corolário:
$m = 13 \leq 15 = 3 * 7 - 6 = 3n - 6.$
Como o grafo satisfaz o corolário não podemos afirmar nada.
O segundo corolário não pode ser aplicado, pois o grafo possui triângulos.

Exemplo cont.

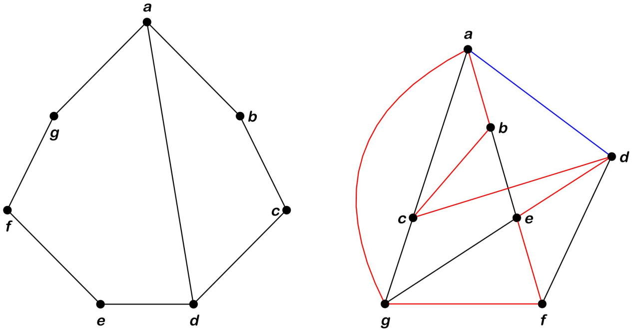
Vamos então aplicar o procedimento de construção de circuitos e tentar obter um representação planar para este grafo.

Vamos determinar o circuito mais longo neste grafo. Considere o circuito $\{a, b, c, d, e, f, g, a\}$.



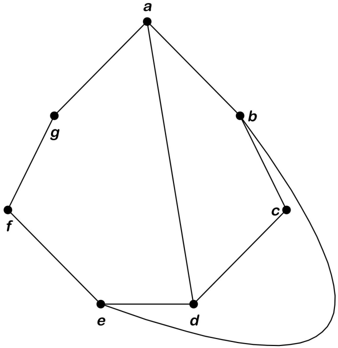
Exemplo cont.

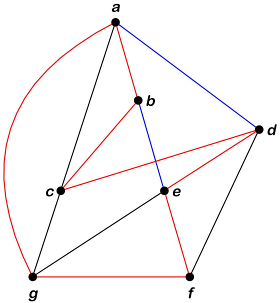
Vamos iniciar o procedimento inserindo, por exemplo, a aresta (a, d):



Exemplo cont.

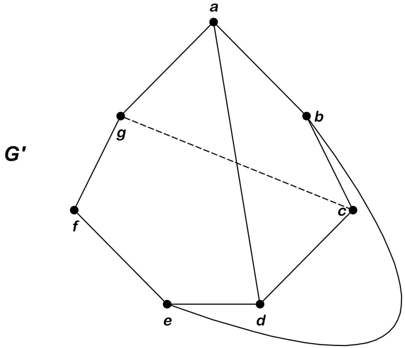
Para inserir a aresta (b, e) temos apenas uma opção, inserir fora do circuito:

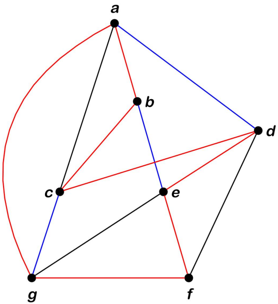




Exemplo cont.

Observe agora que a aresta (c, g) não pode ser desenhada fora, ou dentro do circuito:



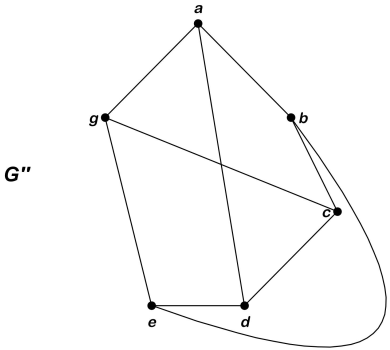


Assim podemos dizer que o grafo dado não é planar.

Exemplo cont.

Vamos agora encontrar uma configuração do $K_{3,3}$ ou do K_5 no grafo G. De acordo com o Teorema de Kuratowski, se o grafo é não-planar devemos encontrar uma. Como fazer?

Para identificar a configuração do $K_{3,3}$ vamos eliminar do subgrafo G' os vértices de grau 2, através da fusão das arestas (g, f) e (f, e):

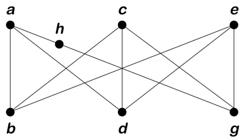


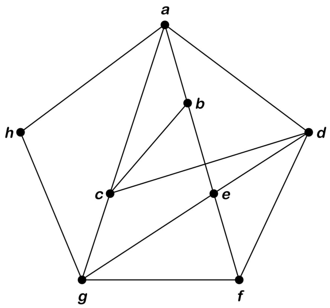
Exemplo cont.

O grafo reduzido G'' é o $K_{3,3}$.

Basta tomar $V_1 = \{a, c, e\}$ e $V_2 = \{b, d, g\}$.

O subgrafo de G que é uma configuração do $K_{3,3}$ é então:





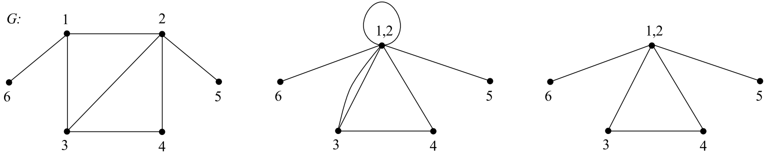
Contração de arestas

Definição

A fusão de um par de vértices v e w em um grafo G é feita substituindo os dois vértices por um único vértice v,w, de tal forma que toda aresta que era incidente no vértice v e/ou no vértice w passa a ser incidente no novo vértice v, w.

Definição

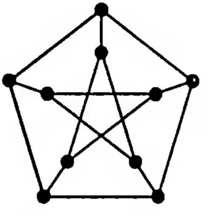
A contração de dois vértices v e w é feita através da fusão dos vértices v e w e a remoção dos loops e arestas paralelas que são formadas no processo.



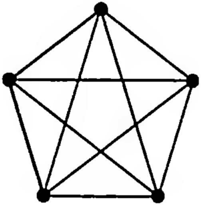
Contração de grafos

Definição

*A **contração** de um grafo é o resultado de uma sequência de contração de seus vértices.*



Contraia
os raios



Teorema

Um grafo G é planar se, e somente se, G não contém um subgrafo que possui K_5 ou $K_{3,3}$ como uma contração.

Demonstração.

Ver R. Wilson, Introduction to Graph Theory. □

Exemplo

O Grafo de Petersen não é planar.

Algoritmos

Algoritmos para verificar se uma dado grafo é planar e em caso positivo exibir uma representação planar do grafo:

1. Algoritmo de Hopcroft e Tarjan em "Teoria do grafos - Algoritmos", Antonio Luiz Furtado, L.T.C. Editora, 1973.
2. Algoritmo de Demoucron et al. em "Algorithmic Graph Theory", J.A. Machugh, Prentice Hall, 1990.
3. Algoritmos Lineares para Teste de Planaridade em Grafos, Edna Ayako Hoshino. Dissertação de Mestrado, UFMS. Disponível em: http://facom.sites.ufms.br/files/2015/12/2002___edna_ayako.pdf (última visita: 30/05/2016).
4. Teste de planaridade e seus principais algoritmos, José Coelho de Pina, IME-USP. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~coelho/sh/introp.html#hopcroft:jacm-21-549 (última visita: 30/05/2016).